771 Η - Θεωρία Υπολογισμών και Αλγορίθμων

Σημειώσεις – Μέρος 2ο

Διδάσκων: Α. Ντελόπουλος

Το παρόν αποτελεί σημειώσεις που αντιστοιχούν σε μέρος των διαλέξεων για το μάθημα **771 Η - Θεωρία Υπολογισμών και Αλγορίθμων** του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Αριστοτέλειου Πανεπιστήμιου Θεσσαλονίκης.

Το υλικό των διαλέξεων και των σημειώσεων στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό στην ύλη του βιβλίου: *Harry R. Lewis and Christos H. Papadimitriou, "Elements of the Theory of Computation," 2nd edition, Prentice Hall, 1998*.

ΑΠΘ/ΤΗΜΜΥ/2001-2 771 Η - Θεωρία Υπολογισμών και Αλγορίθμων Διδάσκων: Α. Ντελόπουλος

Πεπερασμένα Αυτόματα (υπολογιστικές μηχανές πεπερασμένων καταστάσεων)

Ορισμοί, Ιδιότητες, Αντιστοιχία με τις Κανονικές Γλώσσες

Πεπερασμένα αυτόματα – η κεντρική ιδέα

- Τα πεπερασμένα αυτόματα είναι υπολογιστές με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:
  - Έχουν πεπερασμένη (σταθερού μεγέθους) μνήμη εντός της κεντρικής μονάδας επεξεργασίας
  - Δέχονται ως είσοδο συμβολοσειρές τις οποίες διαβάζουν σειριακά
    - το ένα σύμβολο μετά το άλλο
    - δεν γυρίζουν προς τα πίσω
  - παράγουν ως 'έξοδο' μόνο μία ένδειξη για το άν η συμβολοσειρά εισόδου γίνεται *αποδεκτή*
- Το σύνολο των αποδεκτών συμβολοσειρών είναι η **αποδεκτή γλώσσα** του αυτόματου

Πεπερασμένα αυτόματα – η κεντρική ιδέα

- Τα πεπερασμένα αυτόματα αντιστοιχούν (1-1) σε κανονικές γλώσσες
- Υπάρχουν και πιό σύνθετες υπολογιστικές μηχανές που ακολουθούν...
- Δύο βασικές κατηγορίες
  - αιτιοκρατικά
  - μη αιτιοκρατικά
- Θα δειχθεί ότι οι παραπάνω δύο κατηγορίες είναι ισοδύναμες (!) ώς προς τις γλώσσες που αποδέχονται

Αιτιοκρατικά Πεπερασμένα Αυτόματα

- Αιτιοκρατικό Πεπερασμένο Αυτόματο (ΑΠΑ):

$$M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$$

  - K : το πεπερασμένο σύνολο **καταστάσεων**
  - Σ : αλφάβητο
  - $s \in K$: **αρχική κατάσταση**
  - $F \subseteq K$: το σύνολο των **τελικών καταστάσεων**
  - δ : η **συνάρτηση μετάβασης** από το $K \times \Sigma$ στο K
- Μία συμβολοσειρά (συμβόλων του Σ) γίνεται αποδεκτή όταν, διαβάζοντάς την, το M μεταβαίνει (σύμφωνα με τη $\delta: K \times \Sigma \rightarrow K$) από κατάσταση σε κατάσταση (ξεκινώντας από την s) και καταλήγει (εξαντλώντας τη συμβολοσειρά σε οποιαδήποτε *τελική κατάσταση* (εντός του F)

Αιτιοκρατικά Πεπερασμένα Αυτόματα: αναπαράσταση με γράφους

M = (K, Σ, δ, s, F)

K = $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

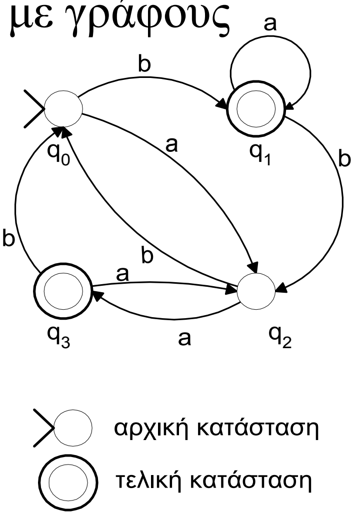
Σ = {a, b}

s = q_0

F = $\{q_1, q_3\}$

δ : υποδηλώνεται από τη σημειολογία του γράφου

$\delta(q_0,a)=q_2$, $\delta(q_0,b)=q_1$,
$\delta(q_1,a)=q_1$, $\delta(q_1,b)=q_2$,
$\delta(q_2,a)=q_3$, $\delta(q_2,b)=q_0$,
$\delta(q_3,a)=q_2$, $\delta(q_3,b)=q_0$



Αιτιοκρατικά Πεπερασμένα Αυτόματα: **ολικές καταστάσεις**

- **Ολική κατάσταση** $(q,w) \in K\times\Sigma^*$ = η τρέχουσα κατάσταση, q, μαζί με την υποσυμβολοσειρά, w, που απομένει να διαβαστεί
- Η (q,w) '**παράγει σε ένα βήμα**' την (q',w') (γράφουμε $(q,w)\Rightarrow_M(q',w')$) άν και μόνο άν
  - w=aw' για κάποιο $a \in \Sigma$ και
  - δ(q,a) = q'
- Η (q,w) '**παράγει**' την (q',w') (γράφουμε $(q,w)\Rightarrow_M^* (q',w')$) όταν από την (q,w) καταλήγουμε στην (q',w') μετά από έναν αριθμό (δεκτό και το 0) βημάτων
- Η σχέση $\Rightarrow_M^*$ είναι το ανακλαστικό μεταβατικό κλείσιμο της $\Rightarrow_M$
- Η συμβολοσειρά w είναι ***αποδεκτή*** από το M όταν $(s,w) \Rightarrow_M^* (q,e)$, $q \in F$

Μη Αιτιοκρατικά Πεπερασμένα Αυτόματα

- Μη Αιτιοκρατικό Πεπερασμένο Αυτόματο (ΜΑΠΑ):

  $$M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$$

  – K : το πεπερασμένο σύνολο **καταστάσεων**
  – Σ : αλφάβητο
  – $s \in K$: **αρχική κατάσταση**
  – $F \subseteq K$: το σύνολο των **τελικών καταστάσεων**
  – Δ : η **σχέση μετάβασης** είναι **υποσύνολο** του $K \times (\Sigma \cup \{e\}) \times K$
- Βασικές διαφοροποιήσεις σε σχέση με τα ΑΠΑ
  – *πολλαπλή επιλογή*: από μία κατάσταση q το **ίδιο** σύμβολο ένδέχεται να οδηγεί σε περισσότερες της μιας καταστάσεις, q_i'
  – *'κόλλημα'*: κάποιες καταστάσεις μπορεί να μη διαθέτουν νόμους μετάβασης για ορισμένα σύμβολα της εισόδου
  – 'μετάβαση εν κενώ': επιτρέπεται η μετάβαση στην επόμενη κατάσταση χωρίς διάβασμα του επόμενου συμβόλου (δηλ. 'διαβάσμα' του e)

Μη Αιτιοκρατικά Πεπερασμένα Αυτόματα: αναπαράσταση με γράφους

$$M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$$

$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

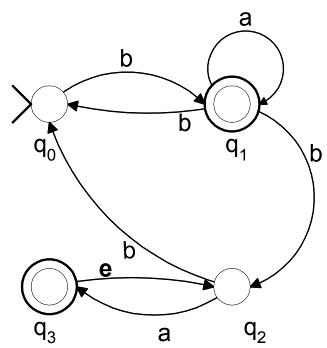
$\Sigma = \{a, b\}$

$s = q_0$

$F = \{q_1, q_3\}$

Δ : υποδηλώνεται από τη σημειολογία του γράφου

$\Delta=\{ (q_0,b,q_1), (q_1,a,q_1), (q_1,b,q_0), (q_1,b,q_2), (q_2,a,q_3), (q_2,b,q_0), (q_3,\mathbf{e},q_2)\}$



Μη Αιτιοκρατικά Πεπερασμένα Αυτόματα

- Μη Αιτιοκρατικότητα = 'από την ίδια αρχική κατάσταση και για την ίδια συμβολοσειρά εισόδου το ΜΑΠΑ οδηγείται σε πολλές εναλλακτικές καταστάσεις
- Μια συμβολοσειρά, w, είναι αποδεκτή από το ΜΑΠΑ, Μ, όταν με την ολοκλήρωση διαβάσματος της w, το Μ καταλήγει σε τουλάχιστο μία **τελική κατάσταση.**

Μη Αιτιοκρατικά Πεπερασμένα Αυτόματα: **ολικές καταστάσεις**

- **Ολική κατάσταση** $(q,w) \in K \times \Sigma^*$: όπως και στα ΑΠΑ
- Η (q,w) '***παράγει σε ένα βήμα***' την (q',w') (γράφουμε $(q,w) \Rightarrow_M (q',w')$) άν και μόνο άν
  - $w=aw'$ για κάποιο $a \in \Sigma \cup \{e\}$ και
  - $(q,a,q') \in \Delta$
- Η (q,w) '***παράγει***' την (q',w') (γράφουμε $(q,w) \Rightarrow_M^* (q',w')$) όταν από την (q,w) καταλήγουμε στην (q',w') μετά από έναν αριθμό (δεκτό και το 0) βημάτων
  - Βεβαίως η (q', w') είναι **μία** από τις εναλλακτικές
- Η σχέση $\Rightarrow_M^*$ είναι το ανακλαστικό μεταβατικό κλείσιμο της $\Rightarrow_M$
- Η συμβολοσειρά w είναι ***αποδεκτή*** από το Μ όταν $(s,w) \Rightarrow_M^* (q,e)$, $q \in F$

ΜΑΠΑ: παράδειγμα

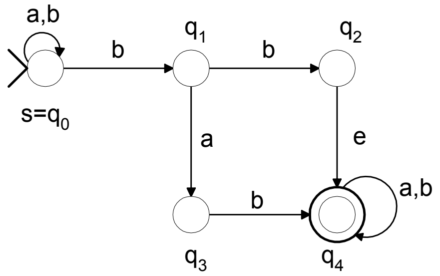
Η γλώσσα L(M) = 'όλες οι συμβολοσειρές που περιέχουν το bb ή το bab'

$(q_0, \text{bababab}) \Rightarrow_M (q_0, \text{ababab})$
$\Rightarrow_M (q_0, \text{babab})$ …
$\Rightarrow_M (q_0, \mathbf{e})$ μη τελική

αλλά **επίσης**

$(q_0, \text{bababab}) \Rightarrow_M (q_1, \text{ababab})$
$\Rightarrow_M (q_3, \text{babab})$
$\Rightarrow_M (q_4, \text{abab})$
$\Rightarrow_M (q_4, \text{bab})$
$\Rightarrow_M (q_4, \text{ab})$
$\Rightarrow_M (q_4, \text{b})$
$\Rightarrow_M (q_4, \mathbf{e})$ τελική

Γενικά για να μπορεί να φτάσει από την q_0 στην τελική q_4 πρέπει να υπάρχουν τα σύμβολα bb (πάνω μονοπάτι) ή bab (κάτω μονοπάτι)

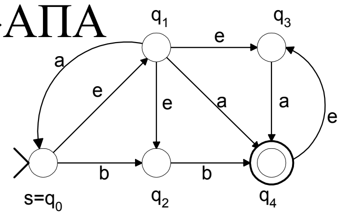


Σχέση Αιτιοκρατικών – Μη Αιτιοκρατικών Αυτομάτων

- Κάθε ΑΠΑ είναι ΜΑΠΑ
  - $\Delta(q_1, a, q_2) = (q_1, a, \delta(q_1, a))$
  - $K \times \Sigma \times K \subseteq K \times (\Sigma \cup \{e\}) \times K$
- Για κάθε ΜΑΠΑ υπάρχει ισοδύναμο (= που αποδέχεται την ίδια γλώσσα) ΑΠΑ
  - Θεώρημα:

  Έστω ΜΑΠΑ $M=(K,\Sigma,\Delta,s,F)$ και ΑΠΑ $M'=(K',\Sigma',\delta',s',F')$, τότε $L(M)=L(M')$ αν $K' = 2^K$, $F' = \{Q/Q \in K' \text{ και } Q \cap F \neq \emptyset\}$, $s'=E(s)$, $\delta'(Q,a)=\cup\{E(p): p \in K \text{ και } (q,a,p) \in \Delta \text{ για κάποιο } q \in Q\}$ όπου $E(q) \equiv \{p \in K : (q,e) \Rightarrow_M^* (p,e)\}$
  - Απόδειξη: Στηρίζεται στο γεγονός ότι για $w \in \Sigma^*$ και $p,q \in K$, ισχύει ότι $(q,w) \Rightarrow_M^*(p,e) \Leftrightarrow (E(q),w) \Rightarrow_{M'}^* (P,e)$ για κάποιο $P \ni p$ (δείξτε το με επαγωγή). Τότε $w \in L(M) \Leftrightarrow (s,w) \Rightarrow_M^*(f,e)$ με $f \in F \Leftrightarrow (E(s),w) \Rightarrow_{M'}^*(Q,e)$ για κάποιο $Q \ni f \Leftrightarrow (E(s),w) \Rightarrow_{M'}^*(Q,e)$ για κάποιο $Q \in F' \Leftrightarrow w \in L(M')$ ο.ε.δ.

Παράδειγμα ΜΑΠΑ→ΑΠΑ



- ΜΑΠΑ: $M=(K,\Sigma,\Delta,s,F)$ με
  $K=\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{a, b\}$
  $s = q_0$, $F = \{q_4\}$ και
  Δ= όπως φαίνεται στο σχήμα
  Τότε $E(q_0)=\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$, $E(q_1)=\{q_1,q_2,q_3\}$, $E(q_2)=\{q_2\}$, $E(q_3)=\{q_3\}$, $E(q_3)=\{q_3,q_4\}$
- Οπότε το ισοδύναμο ΑΠΑ $M'=(K',\Sigma',\delta',s',F')$ με
  $K'=2^K=\{\varnothing, \{q_0,q_1,q_2,q_3\}, \{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\}, \{q_3, q_4\},\ldots\}$, όπου $|K'|=2^5=32$
  $\Sigma = \{a, b\}$, $s'= Q_0 = E(q_0)=\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$,
  $F'=\{\{q_4\}, \{q_0,q_4\} \{q_1,q_4\},\{q_2, q_4\},\{q_3, q_4\},\{q_0 ,q_1,q_4\}\ldots.\}$
  και συνάρτηση μετάβασης που υπολογίζεται σιγά-σιγά ώς εξής:
  - $\delta'(s',a)= \cup\{E(p): p \in K$ και $(q,a,p) \in \Delta$ για κάποιο $q \in s'\}= E(q_0) \cup E(q_4)$ αφού όλες οι μεταβάσεις της μορφής (q,a,p) με $q \in s'$ είναι οι εξής τρεις: (q_1,a,q_0), (q_1,a,q_4) και (q_3,a,q_4) και συνεπώς το $p \in \{q_0,q_4\}$.
  - Ομοίως $\delta'(s',b)= E(q_2) \cup E(q_4)$, κ.λπ.

Πράξεις Γλωσσών Αποδεκτών από Πεπερασμένα Αυτόματα - **Κλειστότητα**

<u>Θεώρημα</u>:

Το σύνολο των γλωσσών που είναι αποδεκτές από πεπερασμένα αυτόματα είναι κλειστό ως πρός τις (μεταξύ γλωσσών) πράξεις :

1. Ένωση
2. Παράθεση
3. Kleene Star
4. Συμπλήρωμα
5. Τομή

Ένωση Αποδεκτών Γλωσσών

- Αν M_1, M_2 ΜΑΠΑ , με το ίδιο αλφάβητο Σ, τότε $L(M_1) \cup L(M_2) = L(M)$ όπου $M=(K,\Sigma,\Delta,s,F)$ με
  - $K= K_1 \cup K_2 \cup \{s\}$ (s μία νέα κατάσταση)
  - $F= F_1 \cup F_2$
  - $\Delta= \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(s,e,s_1), (s,e,s_2)\}$ (s_1, s_2 οι αρχικές καταστάσεις των M_1, M_2)
- Απόδειξη:

  $w \in L(M_1) \cup L(M_2) \Leftrightarrow$

  $(s_1,w) \Rightarrow_{M_1}{}^*(f_1,e)$ ή $(s_2,w) \Rightarrow_{M_2}{}^*(f_2,e)$ για κάποιο $f_1 \in F_1$ ή $f_2 \in F_2 \Leftrightarrow$

  $(s,w) \equiv (s,ew) \Rightarrow_M (s_1,w) \Rightarrow_M{}^*(f_1,e)$ ή $(s,w) \equiv (s,ew) \Rightarrow_M (s_2,w) \Rightarrow_M{}^*(f_2,e) \Leftrightarrow$

  $(s,w) \Rightarrow_M{}^*(f,e)$ για κάποιο f (το f_1 ή f_2) $\in F \Leftrightarrow$

  $w \in L(M)$

Παράθεση Αποδεκτών Γλωσσών

- Αν M_1, M_2 ΜΑΠΑ , με το ίδιο αλφάβητο Σ, τότε $L(M_1)L(M_2)=L(M)$ όπου $M=(K,\Sigma,\Delta,s,F)$ με
  - $K= K_1 \cup K_2$
  - $F= F_2$
  - $\Delta= \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(f,e,s_2): f \in F_1\}$
  - $s= s_1$
  - όπου s_1, s_2 οι αρχικές καταστάσεις των M_1, M_2
- Το M ξεκινά προσομοιώνοντας το M_1 και σε αυθαίρετο σημείο μεταπηδά από μία τελική κατάσταση του M_1 στην αρχική κατάσταση του M_2.

Kleen Star Αποδεκτών Γλωσσών

- Αν M_1 ΜΑΠΑ με αλφάβητο Σ, τότε $L(M_1)^*=L(M)$ όπου $M=(K,\Sigma,\Delta,s,F)$ με
  - $K= K_1 \cup \{s_1'\}$ όπου s_1' μία νέα κατάσταση
  - $F = F_1 \cup \{s_1'\}$
  - $\Delta = \Delta_1 \cup \{(f,e,s_1): f \in F_1\} \cup \{(s_1',e,s_1)\} = \Delta_1 \cup \{(f,e,s_1): f \in F\}$
  - $s= s_1'$
- Αφου $s= s_1' \in F$ η συμβολοσειρά w=e είναι αποδεκτή
- Κάθε συμβολοσειρά, w, αποδεκτή από το M_1 είναι αποδεκτή και από το M.
- Όταν διαβαστεί μία υπο-συμβολοσειρά που είναι αποδεκτή από το M_1, είναι ενδεχόμενες μία ή περισσότερες τελικές καταστάσεις του M_1 όποτε από κεί το M (χωρίς να διαβάσει νέο σύμβολο) μπορεί να μεταπηδήσει στην αρχική κατάσταση του M_1 και να επαναλάβει τη διαδικασία.

Συμπλήρωμα Αποδεκτών Γλωσσών

- Αν το M είναι ΑΠΑ με αλφάβητο Σ, τότε
  $L(M_c) =\Sigma^*-L(M)$ όπου $M_c = (K,\Sigma,\delta,s,K-F)$
- Το M_c ταυτίζεται με το M μόνο που οι τελικές καταστάσεις του ενός είναι μή τελικές καταστάσεις του άλλου

Τομή Αποδεκτών Γλωσσών

- Αν M_1, M_2 ΜΑΠΑ , με το ίδιο αλφάβητο Σ, τότε $L(M_1) \cap L(M_2) = \Sigma^* - ((\Sigma^* - L(M_1)) \cup (\Sigma^* - L(M_2)))$
- Κατά συνέπεια με βάση τα προηγούμενα μπορεί να κατασκευαστεί ΜΑΠΑ M τέτοιο ώστε:

$$L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$$

Κλειστότητα Αποδεκτών Γλωσσών

- Το σύνολο των γλωσσών που είναι αποδεκτές από πεπερασμένα αυτόματα είναι κλειστό ώς προς τις πράξεις:
  - Ένωση
  - Παράθεση
  - Kleen Star
  - Συμπλήρωμα
  - Τομή
- Απόδειξη: Προκύπτει από τα προηγούμενα εφόσον για κάθε μία από τις παραπάνω πράξεις μπορούμε να κατασκευάσουμε ΠΑ που να υλοποιεί τη γλώσσα που προκύπτει

Σχέση Αποδεκτών και Κανονικών Γλωσσών

- Μία Γλώσσα είναι Κανονική **αν και μόνο αν** είναι αποδεκτή από κάποιο πεπερασμένο αυτόματο!
- Απόδειξη:
  - **"μόνο αν"**:
    - Κάθε κανονική γλώσσα προκύπτει από τις γλώσσες {},{a} (όπου $a \in \Sigma$) μέσω των πράξεων Ένωση, Παράθεση, Kleen Star. Οι γλώσσες {},{a} είναι αποδεκτές από απλά ΠΑ και συνεπώς λόγω της κλειστότητας (βλ. προηγούμενα) κάθε κανονική γλώσσα είναι αποδεκτή από κάποιο ΠΑ
  - **"αν"**:
    - Αν $M=(K,\Sigma,\Delta,s,F)$ τότε υπάρχει ΚΕ R τέτοια ώστε $L(R) = L(M)$. Συγκεκριμένα μπορεί να αποδειχτεί ότι $L(R) = \cup \{w \in \Sigma^*: (s,w) \Rightarrow_M^*(f,e), f \in F\}$ όπου κάθε ένα από αυτά τα σύνολα είναι κανονική γλώσσα

Έλεγχος "Κανονικότητας"

Θεώρημα:

Έστω κανονική γλώσσα L. Υπάρχει $n \in Z$, $n \geq 1$ τέτοιο που αν $w \in L$ και $|w|>n$ τότε το w μπορεί να γραφεί ως $w=xyz$ όπου:

- $y \neq e$
- $|xy| \leq n$
- $xy^iz \in L$ για κάθε $i \geq 0$

Απόδειξη:

Έστω n ο αριθμός καταστάσεων του αντίστοιχου ΑΠΑ και $w=w_1 w_2 \dots w_n \dots w_{|w|}$.

Τότε $(q_0, w_1 w_2 \dots w_n) \Rightarrow_M (q_1, w_2 \dots w_n) \Rightarrow_M \dots \Rightarrow_M (q_n, e)$, δηλαδή το M μεταπηδά διαδοχικά σε n+1 καταστάσεις. Με βάση την αρχή της φωλιάς των περιστεριών ανάμεσα σ΄αυτές θα υπάρχουν δύο ταυτόσημες, έστω οι $q_i = q_j$ συνεπώς η συμβολοσειρά $y= w_i \dots w_j$ είναι η ζητούμενη.

Ελαχιστοποίηση καταστάσεων

- Υπάρχουν καταστάσεις που
  - δεν είναι επισκέψιμες
  - είναι **ισοδύναμες** ($p \equiv q$)
    - **αν $(p,w) \Rightarrow_M^* (f,e)$ με $f \in F$ τότε $(q,w) \Rightarrow_M^* (f',e)$ με $f' \in F$ και αντιστρόφως**
- Η ελαχιστοποίηση του αυτομάτου συναρτάται με την ανίχνευση κλάσεων ισοδυναμίας στη γλώσσα που αυτό αποδέχεται...

Ισοδύναμες Συμβολοσειρές

Ορισμός:

Αν $L \subseteq \Sigma^*$ και $x,y \in \Sigma^*$ (χωρίς να ανήκουν κατανάγκη στην L) τότε

$$x \approx_L y$$

όταν $\forall\ z \in \Sigma^*,\ xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$

Η σχέση $\approx_L$ είναι σχέση ισοδυναμίας και διαμερίζει το Σ^*

Το "Ελάχιστο" Αυτόματο

- Έστω κανονική γλώσσα L και N ο αριθμός των κλάσεων ισοδυναμίας $\approx_L$ αυτής
- Τότε **υπάρχει** ΑΠΑ, M, με ακριβώς N καταστάσεις που αποδέχεται την L (δηλ. L=L(M))
- Το αυτόματο αυτό χαρακτηρίζεται ως "**το πρότυπο**" αυτόματο της γλώσσας L
- Αποδεικνύεται (αποδείξτε το...) ότι M=(K,Σ,δ,s,F) με
  - $K=\{[x]/x \in \Sigma^*\}$ = "το πεπερασμένο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας ολόκληρου του Σ*"
  - s=[e]
  - $F = \{[x]/x \in L\}$ = "το πεπερασμένο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας της $L \subseteq \Sigma^*$" $\subseteq K$
  - $\delta([x], a) = [xa]$
- Δεν υπάρχει ΑΠΑ με λιγότερες καταστάσεις που να αποδέχεται την L

Πώς ομως βρίσκουμε τις κλάσεις ; ...

- Ορισμοί:
  - Δύο καταστάσεις p,q λέγονται **ισοδύναμες** ($p\equiv q$) όταν:
    αν $(p,w) \Rightarrow_M^* (f,e)$ με $f \in F$ τότε $(q,w) \Rightarrow_M^* (f',e)$ με $f' \in F$ και αντιστρόφως $\forall \mathbf{w} \in \boldsymbol{\Sigma}^*$
  - Δύο καταστάσεις p,q λέγονται **n-ισοδύναμες** ($p\equiv_n q$) όταν:
    αν $(p,w) \Rightarrow_M^* (f,e)$ με $f \in F$ τότε $(q,w) \Rightarrow_M^* (f',e)$ με $f' \in F$ και αντιστρόφως $\forall \mathbf{w} \in \boldsymbol{\Sigma}^*$ **με** $|\mathbf{w}|\leq \mathbf{n}$
- Λήμμα: $p\equiv_n q$ αν και μόνο αν
  - $p\equiv_{n-1} q$ και
  - $\delta(q,\alpha) \equiv_{n-1} \delta(p,\alpha)\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\Sigma}$

Πώς όμως βρίσκουμε τις κλάσεις ...

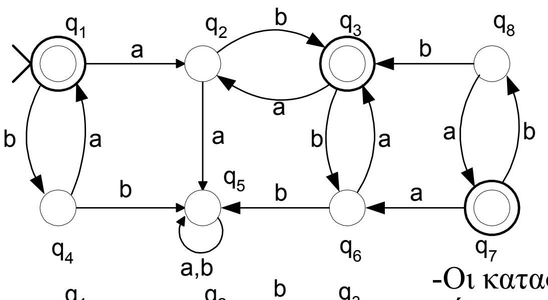
Αρχικά οι κλάσεις ισοδύναμίας των καταστάσεων ώς προς $\equiv_0$ είναι οι εξής δύο F και K-F

repeat for n:=1,2,…

- υπολόγισε τις κλάσεις της $\equiv_n$ από αυτές της $\equiv_{n-1}$ με βάση το Λήμμα

until οι κλάσεις τις $\equiv_n$ ταυτίζονται με τις κλάσεις της $\equiv_{n-1}$

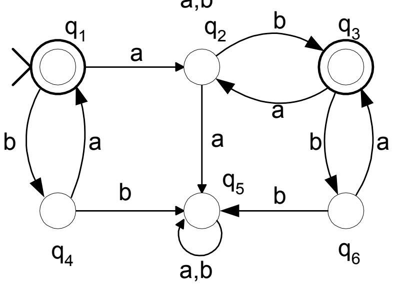
Το “Ελάχιστο” Αυτόματο - παράδειγμα



Αποδεκτή γλώσσα:

$L(M) = (ab \cup ba)^*$

(δείξτε το)



-Οι καταστάσεις q_7 και q_8 είναι μή προσπελάσιμες

-Τις εντοπίσαμε βρίσκοντας το “κλείσιμο” της {s} ως προς τη σχέση $\{(p,q)/\delta(p,\alpha)=q$ για κάποιο $\alpha \in \Sigma\}$

-Τίς παραλείπουμε (κάτω σχήμα)

Το “Ελάχιστο” Αυτόματο – παράδειγμα
(συνέχεια - χρήση του αλγορίθμου)

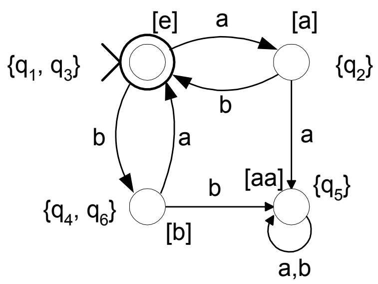
n=0	K1=F={q_1, q_3}	K2=K-F={q_2, q_4, q_5, q_6}
n=1	K1.1=F={q_1, q_3}	K2.1={q_2} K2.2={q_4, q_6} K2.3={q_5}
n=2	K1.1.1=F={q_1, q_3}	K2.1.1={q_2} K2.2.1={q_4, q_6} K2.3.1={q_5}

Ιδια ----> STOP

Το “Ελάχιστο” Αυτόματο – παράδειγμα
(συνέχεια-το αποτέλεσμα και οι αντίστοιχες κλάσεις της γλώσσας)

Η αποδεκτή γλώσσα L(M) = (ab$\cup$ba)* έχει 4 κλάσεις ισοδυναμίας

1. [e]=L
2. [a]=La
3. [b]=Lb
4. [aa]=L(aa $\cup$bb)Σ*



Κάθε συμβολοσειρά του Σ* ανήκει στις 1-4

Άρα το ελάχιστο (πρότυπο) ΑΠΑ έχει 4 καταστάσεις

Αλγόριθμοι για Πεπερασμένα Αυτόματα - 1

1. ΜΑΠΑ (Κ,Σ,Δ,s,F) → ΑΠΑ
   – Πολυποπλοκότητα: $O(2^{|K|}|K|^5|\Sigma||\Delta|)$
2. ΚΕ R → ΜΑΠΑ
   – Πολυπλοκότητα: $O(4|R|^2) = O(|R|^2)$
3. ΜΑΠΑ (Κ,Σ,Δ,s,F) ή ΑΠΑ (Κ,Σ,δ,s,F) → ΚΕ
   – Πολυπλοκότητα: $O(|K|^3 3^{|K|})$
4. ΑΠΑ (Κ,Σ,δ,s,F) → Πρότυπο (ελάχιστο) ΑΠΑ
   – Πολυπλοκότητα: $O(|\Sigma||K|^3)$

Αλγόριθμοι για Πεπερασμένα Αυτόματα - 2

1. Αν L είναι κανονική γλώσσα τότε ο αλγόριθμος που ελέγχει αν κάποιο w ($w \in \Sigma^*$) ανήκει στην L έχει πολυπλοκότητα $O(|w|)$
   – όση χρειάζεται το αντίστοιχο ΑΠΑ για να διαβάσει το w
2. Έστω ΜΑΠΑ M= (Κ,Σ,Δ,s,F) και $w \in \Sigma^*$. Ο αλγόοριθμος που ελέγχει αν $w \in L(M)$ έχει πολυπλοκότητα $O(|K|^2|w|)$