

# 771 Η - Θεωρία Υπολογισμών και Αλγορίθμων

Σημειώσεις – Μέρος 4<sup>ο</sup>

Διδάσκων: Α. Ντελόπουλος

Το παρόν αποτελεί σημειώσεις που αντιστοιχούν σε μέρος των διαλέξεων για το μάθημα **771 Η - Θεωρία Υπολογισμών και Αλγορίθμων** του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Αριστοτέλειου Πανεπιστήμιου Θεσσαλονίκης.

Το υλικό των διαλέξεων και των σημειώσεων στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό στην ύλη του βιβλίου: *Harry R. Lewis and Christos H. Papadimitriou, "Elements of the Theory of Computation," 2nd edition, Prentice Hall, 1998.*

# Μηχανές Turing

Ορισμοί, Ιδιότητες, Υπολογισμοί,  
Συναρτήσεις, Γλώσσες

# Μηχανές Turing

## μια επινόηση του Alan Turing

- Οι Μηχανές Turing (MT) αναπαριστούν οποιοδήποτε και οσοδήποτε σύνθετο υπολογιστή ή αλγόριθμο!
- Είναι μία γενίκευση των αυτομάτων στοίβας
  - η στοίβα αντικαθίσταται από μία “ταινία” εγγραφής συμβόλων και κεφαλή ανάγνωσης που κινείται αριστερά/δεξιά
  - Η συμβολοσειρά εισόδου είναι το αρχικό περιεχόμενο της ταινίας
  - μεταξύ των καταστάσεων υπάρχουν κάποιες που σηματοδοτούν τερματισμό των υπολογισμών
  - Υπάρχει αποτέλεσμα των υπολογισμών (έξοδος) που είναι το τελικό περιεχόμενο της ταινίας
- Υπάρχουν διάφορες εκδόσεις (με 1 ή 2 κεφαλές, με διδιάστατη ταινία, με ταινία δύο όψεων, με random access, κ.λπ.) άλλα όλες είναι ισοδύναμες προς τη βασική έκδοση!

# Μηχανές Turing (βασική έκδοση)

- Οι MT αποτελούνται από:
  - Τη Μονάδα Ελέγχου που έχει πεπερασμένες καταστάσεις
  - Μία Ταινία την οποία η MT προσπελαύνει μέσω της κεφαλής ανάγνωσης/εγγραφής.
    - Η ταινία έχει αρχή αλλά όχι τέλος
- Η κεφαλή σε κάθε βήμα λειτουργίας κάνει **ένα** από τα ακόλουθα:
  - διαβάζει και γράφει (αντικαθιστά το τρέχον σύμβολο με νέο)
  - μετακινείται μία θέση δεξιά ή μία θέση αριστερά
- Η MT σε κάθε βήμα υπολογισμού μεταπίπτει σε νέα κατάσταση ανάλογα με
  - την τρέχουσα κατάσταση
  - το τρέχον σύμβολο της ταινίας

# Μηχανές Turing

## Αυστηρός Ορισμός

- MT είναι η διατεταγμένη πεντάδα  $M=(K,\Sigma,\delta,s,H)$ 
  - $K$  = πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων
  - $\Sigma$  = αλφάβητο που
    - υποχρεωτικά περιέχει τα σύμβολα
      - $\square$  (κενό διάστημα ή απλώς κενό) και  $\triangleright$  (αριστερό άκρο)
    - υποχρεωτικά δεν περιέχει τα σύμβολα  $\leftarrow$  και  $\rightarrow$  (μετακίνησης της κεφαλής αριστερά/δεξιά)
  - $s$  = η αρχική κατάσταση ( $s \in K$ )
  - $H$  = σύνολο των καταστάσεων στις οποίες το  $M$  σταματά ( $H \subseteq K$ )
  - $\delta$  = συνάρτηση μετάβασης,  $\delta: (K-H) \times \Sigma \rightarrow K \times (\Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\})$  με τους περιορισμούς
    - Αν  $\delta(q, \triangleright) = (p, b)$  τότε  $b = \rightarrow$
    - Αν  $\delta(q, a) = (p, b)$  τότε  $b \neq \triangleright$

# Μηχανές Turing -Λειτουργία

- Έστω ότι το  $M$  είναι στην κατάσταση  $q$  και το τρέχον σύμβολο της ταινίας είναι  $a$
- Αν  $\delta(q,a) = (p,b)$  (όπου  $q \in K-H$ ,  $p \in K$ ,  $a \in \Sigma$ ,  $b \in \Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\}$ ) τότε η  $MT$ :
  - πηγαίνει στην κατάσταση  $p$  και
  - κάνει ένα από τα παρακάτω:
    - αν  $b \in \Sigma$  τότε αντικαθιστά το  $a$  με το  $b$
    - αν  $b \in \{\leftarrow, \rightarrow\}$  τότε δεν πειράζει το τρέχον σύμβολο  $a$  αλλά μετακινεί την κεφαλή μία θέση αριστερά ( $b = \leftarrow$ ) ή δεξιά ( $b = \rightarrow$ )
- Οι περιορισμοί που έχουν τεθεί στη συνάρτηση μετάβασης  $\delta$  εξασφαλίζουν ότι
  - το  $\triangleright$  δεν μπορεί να αντικατασταθεί ούτε να προσπεραστεί προς τα αριστερά
  - δεν πρόκειται να γραφτεί κάποιο επιπλέον  $\triangleright$  πλην του αρχικού
- Η  $MT$  σταματά όταν βρεθεί σε κατάσταση  $q \in H$

# Παράδειγμα

- $M=(K,\Sigma,\delta,s,H)=(\{q_0,q_1,h\},\{a,\square,\triangleright\},\delta,q_0,\{h\})$  όπου η  $\delta$  περιέχει τις ακόλουθες μεταβάσεις
  - $\delta(q_0,a) = (q_1,\square)$ ,  $\delta(q_0,\square) = (h,\square)$ ,  $\delta(q_0,\triangleright) = (q_0,\rightarrow)$
  - $\delta(q_1,a) = (q_0,a)$ ,  $\delta(q_1,\square) = (q_0,\rightarrow)$ ,  $\delta(q_1,\triangleright) = (q_1,\rightarrow)$
- Για την ταινία  $\triangleright \underline{a}a\square aaa$ 
  - υπογραμμισμένο το τρέχον σύμβολο
- ... το  $M$  υπολογίζει ως εξής:
  - $\triangleright \underline{a}a\square aaa$  (κατάσταση  $s=q_0$ ) και λόγω  $\delta(q_0,a) = (q_1,\square) \rightarrow$
  - $\triangleright \underline{\square}a\square aaa$  (κατάσταση  $q_1$ ) και λόγω  $\delta(q_1,\square) = (q_0,\rightarrow) \rightarrow$
  - $\triangleright \square \underline{a}\square aaa$  (κατάσταση  $q_0$ ) και λόγω  $\delta(q_0,a) = (q_1,\square) \rightarrow$
  - $\triangleright \square \underline{\square}\square aaa$  (κατάσταση  $q_1$ ) και λόγω  $\delta(q_1,\square) = (q_0,\rightarrow) \rightarrow$
  - $\triangleright \square \square \underline{\square}aaa$  (κατάσταση  $q_0$ ) και λόγω  $\delta(q_0,\square) = (h,\square) \rightarrow$
  - $\triangleright \square \square \square \underline{a}aaa$  (κατάσταση  $h$ ) οπότε σταματά.



# Ολικές καταστάσεις

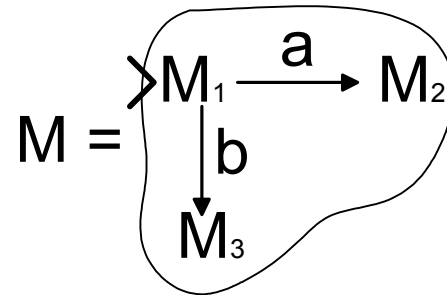
- Ολική κατάσταση  $C$  = ο συνδυασμός της τρέχουσας κατάστασης  $q$  και της θέσης της κεφαλής στην ταινία
  - $C \in K \times \triangleright \Sigma^* \times (\Sigma^*(\Sigma - \{\square\}) \cup \{e\})$  ή απλούστερα
  - $C = (q, w\underline{a}u)$  όπου
    - $q \in K$
    - $w \in \triangleright \Sigma^*$
    - $a \in \Sigma$
    - $u \in \Sigma^* \cup \{e\}$  ΑΛΛΑ το τελευταίο στοιχείο του  $u$  ΔΕΝ μπορεί να είναι το  $\square$  ΕΚΤΟΣ αν είναι το τρέχον
  - Άρα αγνούμε τα κενά στο τέλος της ταινίας
  - Παραδείγματα
    - Επιτρεπτές:  $C=(q, \triangleright ba\underline{a}b)$ ,  $C=(q, \triangleright baab\underline{b})$ ,  $C=(q, \triangleright baab\underline{\square})$
    - Μή επιτρεπτή:  $C=(q, \triangleright ba\underline{a}b\underline{\square})$
- Όπως και στα πεπερασμένα αυτόματα, η ολική κατάσταση καθορίζει πλήρως τη συνέχεια των υπολογισμών της ΜΤ

# Παραγωγή

- Παραγωγή μιας ολικής κατάστασης  $C'$  από την  $C$  σε ένα βήμα = η  $C'$  είναι η ολική κατάσταση στην οποία θα βρεθεί η ΜΤ αμέσως μετά την  $C$ 
  - $C \Rightarrow C'$
- Παραγωγή μιας ολικής κατάστασης  $C'$  από την  $C = \eta C'$  είναι ολική κατάσταση στην οποία θα βρεθεί η ΜΤ μετά την  $C$  και αφού εκτελεστούν μηδέν (0) ή περισσότερα βήματα
  - $C \Rightarrow_M^* C'$
- Ειδικότερα ονομάζουμε υπολογισμό  $n$  βημάτων τη διαδοχή παραγωγών:  $C_0 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_n$ 
  - Γράφουμε  $C_0 \Rightarrow_M^n C_n$
  - Ισχύει βέβαια ότι  $C_0 \Rightarrow_M^* C_n$

# Σύνθεση MT

- Μία MT  $M$  προκύπτει από τη σύνθεση απλούστερων MT σύμφωνα με το εξής παράδειγμα:



- Η MT  $M$  ξεκινά προσομοιώνοντας την  $M_1$ . Αν η  $M_1$  σταματήσει και το τρέχον σύμβολο είναι  $a$  ξεκινά η  $M_2$  ενώ αν το τρέχον σύμβολο είναι το  $b$  ξεκινά η  $M_3$ . Και στις δύο περιπτώσεις η νέα ολική κατάσταση έχει κατάσταση την αρχική κατάσταση της  $M_2$  ή  $M_3$  και την ταινία όπως την άφισε η  $M_1$ .
- Η σύνθεση βασίζεται στις εξαιρετικά απλές (βασικές) MT της επόμενης ενότητας.

# Παραδείγματα σύνθεσης - συμβολισμοί

$$\triangleright M_1 \xrightarrow{a \in \Sigma} M_2 \quad \acute{\eta} \quad \triangleright M_1 \longrightarrow M_2 \quad \acute{\eta} \quad M_1 M_2$$

$$\triangleright M \longrightarrow M \quad \acute{\eta} \quad M^2$$

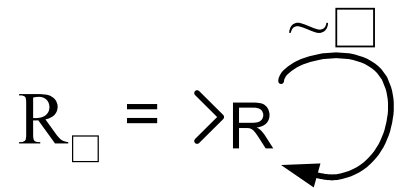
$$\triangleright M_1 \xrightarrow{a \neq b} M_2 \quad \acute{\eta} \quad \triangleright M_1 \xrightarrow{\sim b} M_2$$

Έτσι για παράδειγμα η MT La  $\equiv M_{\leftarrow} \longrightarrow M_a$

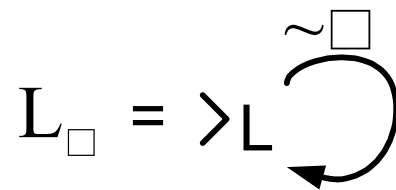
# Βασικές ΜΤ

- Εγγραφέας Συμβόλων / Μετακίνηση κεφαλής:
  - Για  $a \in \Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\} - \{\triangleright\}$
  - Ορίζουμε τη ΜΤ  $M_a = (\{s, h\}, \Sigma, \delta, s, \{h\})$  με  $\delta$  τέτοιο ώστε:
    - $\delta(s, b) = (h, a) \quad \forall b \in \Sigma - \{\triangleright\}$
    - $\delta(s, \triangleright) = (s, \rightarrow)$
  - Αυτές οι απλές ΜΤ:
    - Αντικαθιστούν όλα τα σύμβολα της ταινίας με το  $a$  αν  $a \in \Sigma$ 
      - τότε καταχρηστικά χρησιμοποιούμε το συμβολισμό “ $a$ ” αντί  $M_a$
    - Μετακινούν απλώς την κεφαλή αριστερά ή δεξιά αν  $a \in \{\leftarrow, \rightarrow\}$ 
      - τότε χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς  $L = M_{\leftarrow}$  και  $R = M_{\rightarrow}$

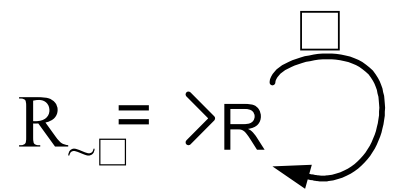
# Απλές (σύνθετες) MT



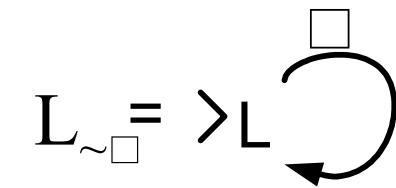
Βρίσκει το πρώτο  $\square$  προς τα δεξιά



Βρίσκει το πρώτο  $\square$  προς τα αριστερά

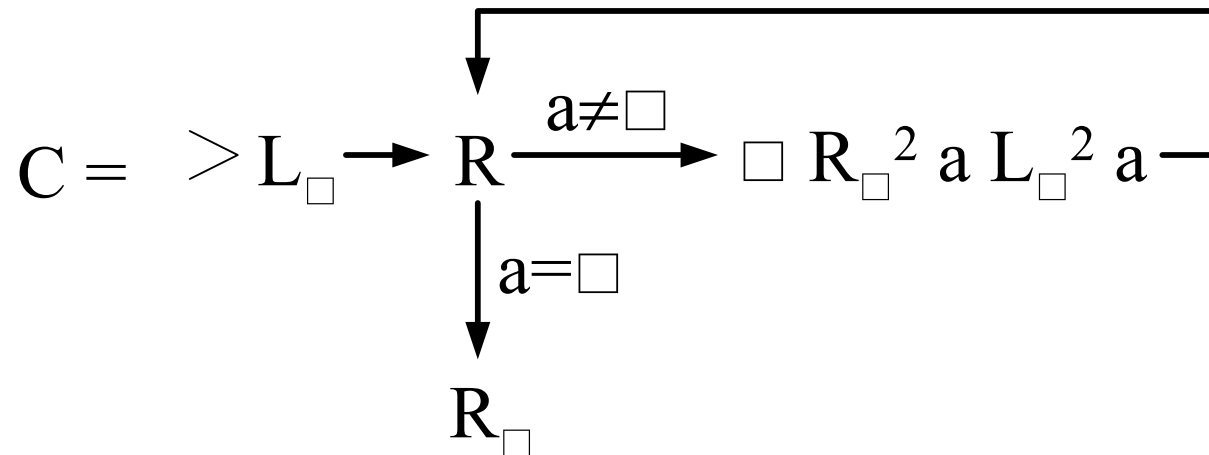


Βρίσκει τον πρώτο μή κενό  
χαρακτήρα ( $\neq \square$ ) προς τα δεξιά



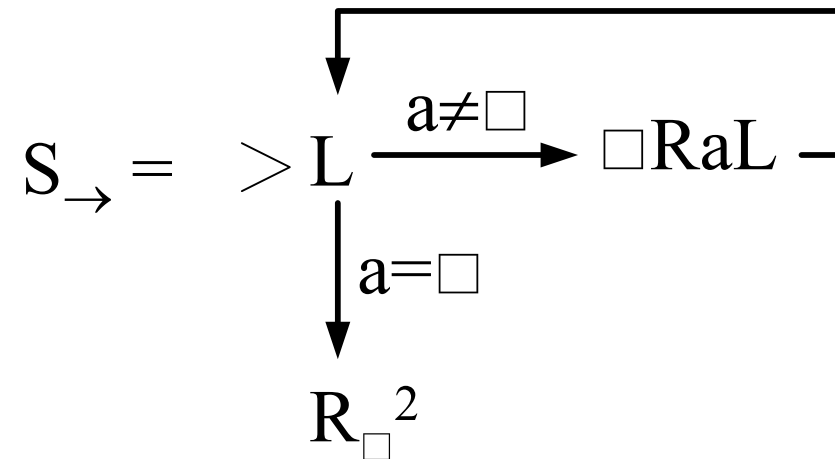
Βρίσκει τον πρώτο μή κενό  
χαρακτήρα ( $\neq \square$ ) προς τα αριστερά

# Μηχανή αντιγραφής (C)



- Αυτή η MT δημιουργεί ένα αντίγραφο του περιεχομένου της ταινίας, δηλαδή για  $w \in (\Sigma - \{\square, \triangleright\})^*$ 
  - από την ταινία  $\square w \underline{\square}$
  - παράγει την ταινία  $\square w \square w \underline{\square}$
- (αποδείξτε το)

## Μηχανή ολίσθησης δεξιά ( $S_{\rightarrow}$ )



- Αυτή η MT ολισθαίνει το περιεχόμενο της ταινίας μία θέση προς τα δεξιά, δηλαδή για  $w \in (\Sigma - \{\square, \triangleright\})^*$ 
  - από την ταινία  $\square w \underline{\square}$
  - παράγει την ταινία  $\square \square w \underline{\square}$
- (αποδείξτε το)



# Υπολογισμοί με ΜΤ

Ορισμός #1:

Έστω ΜΤ  $M=(K,\Sigma,\delta,s,\{y,n\})$

–  $y=yes$  ,  $n=no$

και συμβολοσειρά  $w \in (\Sigma - \{\square, \triangleright\})^*$ . Ορίζουμε ότι:

Η ΜΤ  $M$  **αποδέχεται** το  $w$  αν  $(s, \triangleright \square w) \Rightarrow_M^* (y, xxx)$

Η ΜΤ  $M$  **απορρίπτει** το  $w$  αν  $(s, \triangleright \square w) \Rightarrow_M^* (n, xxx)$

όπου  $xxx$  αντιπροσωπεύει οποιαδήποτε περιεχόμενο της ταινίας

**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Αν η ΜΤ  $M$  δεν καταλήγει σε κατάσταση τερματισμού (καθώς διαβάζει το συγκεκριμένο περιεχόμενο της ταινίας) τότε η  $M$  ούτε αποδέχεται ούτε απορρίπτει!

## Υπολογισμοί με ΜΤ (συνέχεια)

Ορισμός #2:

Αν  $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\square, \triangleright\}$  και η γλώσσα  $L \subseteq \Sigma_0^*$  τότε η ΜΤ Μ **αποφασίζει** τη γλώσσα L αν:

η Μ αποδέχεται κάθε  $w \in L$  και

η Μ απορρίπτει κάθε  $w \notin L$

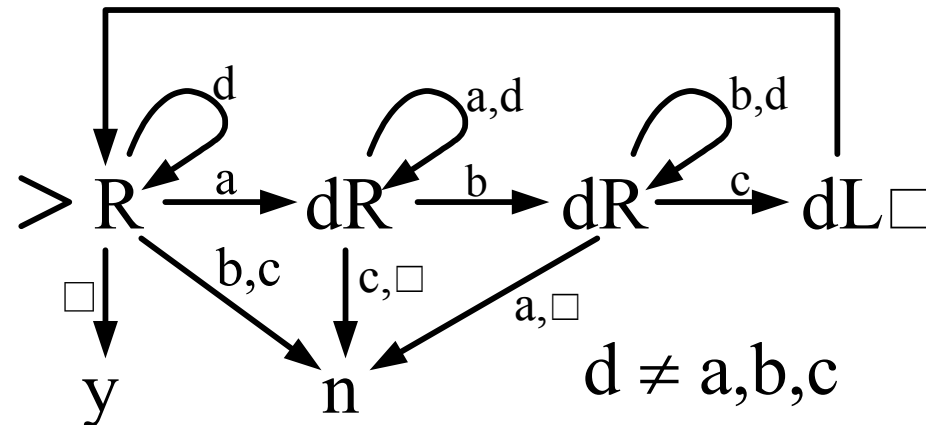
Ορισμός #3:

Μία γλώσσα L λέγεται **αναδρομική** αν υπάρχει ΜΤ που την αποφασίζει.

## Παράδειγμα:

Η αναδρομική γλώσσα  $L = \{a^n b^n c^n, n \geq 0\}$

- Έχουμε ήδη δείξει ότι αυτή η γλώσσα  $L$  δεν είναι ούτε κανονική ούτε χωρίς συμφραζόμενα
- Είναι όμως αναδρομική γιατί την αποφασίζει η παρακάτω MT



όπου η MT  $y$  κάνει απλώς τη νέα κατάσταση  $y$  (yes) και η MT  $n$  κάνει τη νέα κατάσταση  $n$  (no)

# Υπολογισμοί Συναρτήσεων με ΜΤ

Ορισμός #1:

Έστω ΜΤ  $M=(K,\Sigma,\delta,s,\{h\})$

και συμβολοσειρά  $w \in \Sigma_0^*$  όπου  $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\square, \triangleright\}$ .

Ορίζουμε ότι η συμβολοσειρά  $y \in \Sigma_0^*$  είναι η **έξοδος** της ΜΤ  $M$  στην **είσοδο**  $w$  (γράφουμε  $y=M(w)$ ) όταν:

$$(s, \triangleright \square w) \Rightarrow_M^* (h, \triangleright \square y)$$

Ορισμός #2:

Έστω συνάρτηση  $f: \Sigma_0^* \rightarrow \Sigma_0^*$ . Η παραπάνω ΜΤ **υπολογίζει** την  $f$  αν  $f(w)=M(w)$  για κάθε  $w \in \Sigma_0^*$

Ορισμός #3:

Η συνάρτηση  $f: \Sigma_0^* \rightarrow \Sigma_0^*$  λέγεται **αναδρομική** αν υπάρχει ΜΤ που την υπολογίζει

# Αριθμητικοί Υπολογισμοί με ΜΤ

Η συμβολοσειρά  $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \{0,1\}^*$  αποτελεί διαδική αναπαράσταση του φυσικού αριθμού

$$\text{num}(w) = a_1 2^{n-1} + a_2 2^{n-2} + \dots + a_n 2^0$$

Αντιστρόφως για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει η αντίστοιχη διαδική αναπαράσταση  $w \in 0 \cup 1(0 \cup 1)^*$

Ορισμός #1:

Έστω ΜΤ  $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$  όπου  $0, 1 \in \Sigma$  και επιπλέον ο βοηθητικός χαρακτήρας  $;$   $\in \Sigma$ . Έστω επίσης  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  ( $k > 0$ )

Η ΜΤ  $M$  υπολογίζει την  $f$  αν για κάθε  $w_1, w_2, \dots, w_k \in 0 \cup 1(0 \cup 1)^*$

$$\text{num}(M(w_1; w_2; \dots; w_k)) = f(\text{num}(w_1), \text{num}(w_2), \dots, \text{num}(w_k))$$

Ορισμός #2:

Μία συνάρτηση  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  ( $k > 0$ ) λέγεται **αναδρομική** αν υπάρχει ΜΤ που την υπολογίζει

# Αναδρομικά Απαριθμήσιμες Γλώσσες

Ορισμός #1:

Έστω ΜΤ  $M=(K,\Sigma,\delta,s,H)$  και  $L\subseteq\Sigma_0^*$  όπου  $\Sigma_0\subseteq\Sigma-\{\square,\triangleright\}$ .

Η ΜΤ  $M$  **ημιαποφασίζει** τη γλώσσα  $L$  αν  $\forall w\in\Sigma_0^*$  ισχύει:

“ $w\in L$  αν και μόνο αν η ΜΤ  $M$  σταματά όταν δεχθεί είσοδο  $w$ ”

(δεν μας ενδιαφέρει σε ποιά ολική κατάσταση σταματά)

Ορισμός #2:

Μία γλώσσα  $L$  είναι **αναδρομικά απαριθμήσιμη** αν υπάρχει ΜΤ που την ημιαποφασίζει

Θεωρήματα (χωρίς απόδειξη):

1. Αν η  $L$  είναι αναδρομική τότε είναι και αναδρομικά απαριθμήσιμη (υπάρχουν όμως αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες που δεν είναι αναδρομικές)
2. Αν η  $L$  είναι αναδρομική τότε και το συμπλήρωμά της ( $\Sigma_0^*-L$ ) είναι αναδρομική γλώσσα

# Μη Αιτιοκρατικές ΜΤ (ΜΑΜΤ)

- Η διατεταγμένη πεντάδα  $M=(K, \Sigma, \Delta, s, H)$  όπου τα  $K, \Sigma, s, H$  είναι όπως στις ΜΤ αλλά το σύνολο  $\Delta$  είναι σχέση:

$$\Delta \subseteq ((K-H) \times \Sigma) \times (K \times (\Sigma - \{\leftarrow, \rightarrow\}))$$

(και όχι συνάρτηση όπως η  $\delta: ((K-H) \times \Sigma) \rightarrow (K \times (\Sigma - \{\leftarrow, \rightarrow\}))$  στις συμβατικές ΜΤ)

λέγεται **Μη Αιτιοκρατική ΜΤ**.

Σε μία ΜΑΜΤ (κατ' αναλογία με τα ΜΑΠΑ) από μία ολική κατάσταση μπορεί να παραχθούν περισσότερες της μίας νέες ολικές καταστάσεις.

# Μη Αιτιοκρατικές ΜΤ (ΜΑΜΤ) (συνέχεια -1)

Ορισμός #1:

Η ΜΑΜΤ  $M = (K, \Sigma, \Delta, s, H)$  **αποδέχεται** την  
είσοδο  $w \in (\Sigma - \{\square, \triangleright\})^*$  αν

$(s, \triangleright \square w) \Rightarrow_M^* (h, \triangleright u \underline{a} v)$  για κάποιο  $h \in H$  και  $a \in \Sigma$ ,  
 $u, v \in \Sigma^*$

Σημείωση: η ΜΑΜΤ αποδέχεται το  $w$  ακόμη και αν  
υπάρχουν υπολογισμοί (από τους πολλούς που  
διενεργούνται παράλληλα που δεν καταλήγουν σε  
κατάσταση τερματισμού)



# Μη Αιτιοκρατικές ΜΤ (ΜΑΜΤ) (συνέχεια - 2)

Ορισμός #2:

Η ΜΑΜΤ  $M = (K, \Sigma, \Delta, s, H)$  ημιαποφασίζει τη γλώσσα  $L \subseteq (\Sigma - \{\square, \triangleright\})^*$  αν  $\forall w \in (\Sigma - \{\square, \triangleright\})^*$  ισχύει:

$w \in L$  αν και μόνον αν η ΜΑΜΤ  $M$  αποδέχεται τη συμβολοσειρά  $w$

# Μη Αιτιοκρατικές ΜΤ (ΜΑΜΤ)

## (συνέχεια - 3)

Ορισμός #3:

Η ΜΑΜΤ  $M = (K, \Sigma, \Delta, s, \{y, n\})$  **αποφασίζει** τη γλώσσα  $L \subseteq (\Sigma - \{\square, \triangleright\})^*$  αν ισχύουν τα ακόλουθα  $\forall w \in (\Sigma - \{\square, \triangleright\})^*$  :

1. Υπάρχει (αρκετά μεγάλος) φυσικός αριθμός  $N = N(M, w)$  τέτοιος ώστε κανένας υπολογισμός που ξεκινά από την ολική κατάσταση  $(s, \triangleright \underline{\square} w)$  δεν διαρκεί πάνω από  $N$  βήματα (δηλ. **δεν υπάρχει** ολική κατάσταση  $C$  για την οποία  $(s, \triangleright \underline{\square} w) \Rightarrow_M^N C$ )
2.  $w \in L$  αν και μόνο αν  $(s, \triangleright \underline{\square} w) \Rightarrow_M^* (y, \triangleright u \underline{a} v)$  για κάποια  $a \in \Sigma$ ,  $u, v \in \Sigma^*$

# Μη Αιτιοκρατικές ΜΤ (ΜΑΜΤ) (συνέχεια - 4)

Ορισμός #4:

Η ΜΑΜΤ  $M = (K, \Sigma, \Delta, s, H)$  υπολογίζει τη συνάρτηση  $f: (\Sigma - \{\square, \triangleright\})^* \rightarrow (\Sigma - \{\square, \triangleright\})^*$  αν ισχύουν τα ακόλουθα  $\forall w \in (\Sigma - \{\square, \triangleright\})^*$ :

1. Υπάρχει (αρκετά μεγάλος) φυσικός αριθμός  $N=N(M,w)$  τέτοιος ώστε κανένας υπολογισμός που ξεκινά από την ολική κατάσταση  $(s, \triangleright \square w)$  δεν διαρκεί πάνω από  $N$  βήματα (όπως και πριν)
2.  $(s, \triangleright \square w) \Rightarrow_M^* (h, u \underline{v})$  με  $h \in H$  αν και μόνο αν  $ua = \triangleright \square$  και  $v=f(w)$

Σημείωση: Από 1 & 2 προκύπτει ότι όλοι οι εναλλακτικοί υπολογισμοί τερματίζουν (όχι όμως αναγκαστικά στην ίδια κατάσταση ούτε με το ίδιο πλήθος βημάτων) και μάλιστα δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα  $f(w)$

# Ισοδυναμία MAMT και MT

- Αν μία MAMT
  - ημιαποφασίζει ή αποφασίζει μία γλώσσα ή
  - υπολογίζει μία συνάρτησητότε υπάρχει συμβατική MT που κάνει το ίδιο

# Γραμματικές (χωρίς περιορισμούς)

Ορισμός: Μία Γραμματική (χωρίς περιορισμούς) είναι μία τετράδα  $G=(V,\Sigma,R,S)$  όπου:

- $V$  είναι ένα επεκτεταμένο αλφάβητο
- $\Sigma$  είναι το σύνολο των Τερματικών Συμβόλων (ΤΣ) δηλαδή το κλασσικό μας αλφάβητο.  $\Sigma \subseteq V$ .
- $R$  το σύνολο των κανόνων της γραμματικής με  
 $R \subseteq (V^*(V-\Sigma V^*) \times V^*)$  (όπου  $V^*$  όλες οι συμβολοσειρές του  $V$ )
- $S$  το Σύμβολο Εκκίνησης ( $\Sigma E$ )  $\in V-\Sigma$ 
  - Το  $V-\Sigma$  είναι το σύνολο Μη Τερματικών Συμβόλων (ΜΤΣ)

Σημείωση: Η διαφορά των Γραμματικών (χωρίς περιορισμούς) από τις ΓΧΣ συνίσταται στη μορφή των κανόνων  $R$ . Σε αντίθεση με τις ΓΧΣ οι Γραμματικές (χωρίς περιορισμούς) μπορεί να περιέχουν κανόνες της μορφής  $CA \rightarrow AC$ ,  $uAv \rightarrow uBw$  κ.λπ. (που λαμβάνουν υπόψη τα “συμφραζόμενα” των μη τερματικών συμβόλων)

# Γλώσσες που γεννιούνται από Γραμματικές (χωρίς περιορισμούς)

- Η γλώσσα  $L=L(G) \subseteq \Sigma^*$  γεννιέται από τη Γραμματική (χωρίς περιορισμούς)  $G$  αν όλες οι συμβολοσειρές της γεννιούνται από την  $G$

Θεώρημα (χωρίς απόδειξη):

Μία γλώσσα  $L=L(G)$  γεννιέται από μία Γραμματική (χωρίς περιορισμούς)  $G$  αν και μόνον αν είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη

# Παράδειγμα Λειτουργίας Γραμματικής

- Έστω  $G=(V,\Sigma,R,S)$  με
  - $V=\{S, a, b, c, A, B, C, T_a, T_b, T_c\}$
  - $\Sigma=\{a, b, c\}$
  - $R = \{S \rightarrow ABCS, S \rightarrow T_c$   
 $CA \rightarrow AC, BA \rightarrow AB, CB \rightarrow BC,$   
 $CT_c \rightarrow T_c c, CT_c \rightarrow T_b c, BT_b \rightarrow T_b b, BT_b \rightarrow T_a b, AT_a \rightarrow T_a a$   
 $T_a \rightarrow e \}$
  - $S=S$
- Παράδειγμα γέννησης (παραγωγής) συμβολοσειρών:  
 $S \Rightarrow ABCS \Rightarrow ABC T_c \Rightarrow AB T_b c \Rightarrow AT_a bc \Rightarrow T_a abc \Rightarrow abc$
- Εύκολα φαίνεται ότι αυτή η Γραμματική (χωρίς περιορισμούς)  $G$  γεννά τη γλώσσα  $L(G) = \{a^n b^n c^n: n \geq 1\}$  (δείξτε το) που ήδη ξέρουμε ότι είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη!

# Υπολογιστική Πολυπλοκότητα και Γλώσσες

- Η διαδικασία λήψης της απόφασης για το αν μία συμβολοσειρά ανήκει σε μία γλώσσα έχει υπολογιστική πολυπλοκότητα που καθορίζεται από τον αριθμό βημάτων
  - της ΜΤ ή ΜΑΜΤ που την (ημι-)αποφασίζει για
    - τις αναδρομικές και
    - τις αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες
  - ή του αυτόματου στοίβας που την αποδέχεται
    - για τις γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα
  - ή του πεπερασμένου αυτόματου (ΑΠΑ ή ΜΑΠΑ) που την αποδέχεται
    - για τις κανονικές γλώσσες



# Υπολογιστική Πολυπλοκότητα και Γλώσσες – 2

- Μία ευρεία κατηγορία **προβλημάτων** μπορούν να εκφραστούν σαν προβλήματα αναγνώρισης των συμβολοσειρών μίας από τις παραπάνω γλώσσες
- Κατά συνέπεια η πολυπλοκότητα των προβλημάτων αυτών και των **αλγορίθμων** επίλυσής τους συμπίπτει με την πολυπλοκότητα της αντίστοιχης γλώσσας

# Η κλάση $P$

- Μία ΜΤ  $M$  είναι **πολυωνυμικά φραγμένη** όταν υπάρχει πολυώνυμο  $p(n)$  τέτοιο ώστε να ισχύει:

**Για κάθε είσοδο  $x$  δεν υπάρχει ολική κατάσταση  $C$  τέτοια  
ώστε  $(s, \triangleright \sqsubseteq w) \Rightarrow_M^{p(|x|)+1} C$**

- Δηλαδή κανένας υπολογισμός δεν διαρκεί παραπάνω από  $p(|x|)$  βήματα.
- Μία γλώσσα λέγεται **πολυωνυμικά αποφασιζόμενη** (*Polynomially decidable*) όταν την αποφασίζει μία πολυωνυμικά φραγμένη ΜΤ
- Η **κλάση** των πολυωνυμικά αποφασιζόμενων γλωσσών λέγεται  **$P$**

# Η κλάση $NP$

- Μία ΜΑΜΤ  $M$  είναι **πολυωνυμικά φραγμένη** όταν υπάρχει πολυώνυμο  $p(n)$  τέτοιο ώστε να ισχύει:

**Για κάθε είσοδο  $x$  δεν υπάρχει ολική κατάσταση  $C$  τέτοια ώστε  $(s, \triangleright \sqsubseteq w) \Rightarrow_M^{p(|x|)+1} C$**

- Δηλαδή κανένας υπολογισμός (από τους πολλούς που εκτελούνται ταυτόχρονα λόγω του “Μη Αιτιοκρατικού”) δεν διαρκεί παραπάνω από  $p(|x|)$  βήματα.
- Μία γλώσσα λέγεται **μη αιτιοκρατικά πολυωνυμικά αποφασιζόμενη** (*Non-deterministic Polynomially decidable*) όταν την αποφασίζει μία πολυωνυμικά φραγμένη ΜΑΜΤ
- Η κλάση των μη αιτιοκρατικά πολυωνυμικά αποφασιζόμενων γλωσσών λέγεται  **$NP$**

# Η κλάση *EXP*

- Μία ΜΤ  $M$  είναι **εκθετικά φραγμένη** όταν υπάρχει πολυώνυμο  $p(n)$  τέτοιο ώστε να ισχύει:

**Για κάθε είσοδο  $x$  δεν υπάρχει ολική κατάσταση  $C$  τέτοια ώστε  $(s, \triangleright \sqsubseteq w) \Rightarrow_M 2^{p(|x|)+1} C$**

- Δηλαδή κανένας υπολογισμός δεν διαρκεί παραπάνω από  $2^{p(|x|)}$  βήματα.
- Μία γλώσσα λέγεται **εκθετικά αποφασιζόμενη** (*EXP*onentially decidable) όταν την αποφασίζει μία εκθετικά φραγμένη ΜΤ
- Η **κλάση** των εκθετικά αποφασιζόμενων γλωσσών λέγεται ***EXP***

Η σχέση μεταξύ των κλάσεων  
 $P, NP, EXP$

$$P \subseteq NP \subseteq EXP$$