771 Η - Θεωρία Υπολογισμών και Αλγορίθμων

Σημειώσεις – Μέρος 4ο
Διδάσκων: Α. Ντελόπουλος

Το παρόν αποτελεί σημειώσεις που αντιστοιχούν σε μέρος των διαλέξεων για το μάθημα **771 Η - Θεωρία Υπολογισμών και Αλγορίθμων** του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Αριστοτέλειου Πανεπιστήμιου Θεσσαλονίκης.

Το υλικό των διαλέξεων και των σημειώσεων στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό στην ύλη του βιβλίου: *Harry R. Lewis and Christos H. Papadimitriou, "Elements of the Theory of Computation," 2nd edition, Prentice Hall, 1998*.

ΑΠΘ/ΤΗΜΜΥ/2001-2 771 Η - Θεωρία Υπολογισμών και Αλγορίθμων Διδάσκων: Α. Ντελόπουλος

Μηχανές Turing

Ορισμοί, Ιδιότητες, Υπολογισμοί, Συναρτήσεις, Γλώσσες

Μηχανές Turing
μια επινόηση του Alan Turing

- Οι Μηχανές Turing (ΜΤ) αναπαριστούν οποιοδήποτε και οσοδήποτε σύνθετο υπολογιστή ή αλγόριθμο!
- Είναι μία γενίκευση των αυτομάτων στοίβας
  – η στοίβα αντικαθίσταται από μία "ταινία" εγγραφής συμβόλων και κεφαλή ανάγνωσης που κινείται αριστερά/δεξιά
  – Η συμβολοσειρά εισόδου είναι το αρχικό περιεχόμενο της ταινίας
  – μεταξύ των καταστάσεων υπάρχουν κάποιες που σηματοδοτούν τερματισμό των υπολογισμών
  – Υπάρχει αποτέλεσμα των υπολογισμών (έξοδος) που είναι το τελικό περιεχόμενο της ταινίας
- Υπάρχουν διάφορες εκδόσεις (με 1 ή 2 κεφαλές, με διδιάστατη ταινία, με ταινία δύο όψεων, με random access, κ.λπ.) άλλα όλες είναι ισοδύναμες προς τη βασική έκδοση!

Μηχανές Turing (βασική έκδοση)

- Οι ΜΤ αποτελούνται από:
  - Τη Μονάδα Ελέγχου που έχει πεπερασμένες καταστάσεις
  - Μία Ταινία την οποία η ΜΤ προσπελαύνει μέσω της κεφαλής ανάγνωσης/εγγραφής.
    - Η ταινία έχει αρχή αλλά όχι τέλος
- Η κεφαλή σε κάθε βήμα λειτουργίας κάνει **ένα** από τα ακόλουθα:
  - διαβάζει και γράφει (αντικαθιστά το τρέχον σύμβολο με νέο)
  - μετακινείται μία θέση δεξιά ή μία θέση αριστερά
- Η ΜΤ σε κάθε βήμα υπολογισμού μεταπίπτει σε νέα κατάσταση ανάλογα με
  - την τρέχουσα κατάσταση
  - το τρέχον σύμβολο της ταινίας

Μηχανές Turing
Αυστηρός Ορισμός

- ΜΤ είναι η διατεταγμένη πεντάδα $M=(K,\Sigma,\delta,s,H)$

  K = πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων

  Σ = αλφάβητο που
  - υποχρεωτικά περιέχει τα σύμβολα
    - $\square$ (κενό διάστημα ή απλώς κενό) και $\triangleright$ (αριστερό άκρο)
  - υποχρεωτικά δεν περιέχει τα σύμβολα $\leftarrow$ και $\rightarrow$ (μετακίνησης της κεφαλής αριστερά/δεξιά)

  s = η αρχική κατάσταση ($s \in K$)

  H = σύνολο των καταστάσεων στις οποίες το M σταματά ($H \subseteq K$)

  δ = συνάρτηση μετάβασης, δ: $(K-H)\times\Sigma \rightarrow K\times(\Sigma\cup\{\leftarrow, \rightarrow\})$ με τους περιορισμούς
  - Αν $\delta(q, \triangleright) = (p,b)$ τότε $b = \rightarrow$
  - Αν $\delta(q, a) = (p,b)$ τότε $b \neq \triangleright$

Μηχανές Turing -Λειτουργία

- Έστω ότι το Μ είναι στην κατάσταση q και το τρέχον σύμβολο της ταινίας είναι a
- Αν $\delta(q,a) = (p,b)$ (όπου $q \in K\text{-}H$, $p \in K$, $a \in \Sigma$, $b \in \Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\}$) τότε η ΜΤ:
  - πηγαίνει στην κατάσταση p και
  - κάνει ένα από τα παρακάτω:
    - αν $b \in \Sigma$ τότε αντικαθιστά το a με το b
    - αν $b \in \{\leftarrow, \rightarrow\}$ τότε δεν πειράζει το τρέχον σύμβολο a αλλά μετακινεί την κεφαλή μία θέση αριστερά ($b=\leftarrow$) ή δεξιά ($b=\rightarrow$)
- Οι περιορισμοί που έχουν τεθεί στη συνάρτηση μετάβασης δ εξασφαλίζουν ότι
  - το ▷ δεν μπορεί να αντικατασταθεί ούτε να προσπεραστεί προς τα αριστερά
  - δεν πρόκειται να γραφτεί κάποιο επιπλέον ▷ πλην του αρχικού
- Η ΜΤ σταματά όταν βρεθεί σε κατάσταση $q \in H$

Παράδειγμα

- $M=(K,\Sigma,\delta,s,H)=(\{q_0,q_1,h\}, \{a, \square, \triangleright\}, \delta, q_0, \{h\})$ όπου η δ περιέχει τις ακόλουθες μεταβάσεις
    - $\delta(q_0,a) = (q_1,\square)$, $\delta(q_0,\square) = (h,\square)$, $\delta(q_0,\triangleright) = (q_0,\rightarrow)$
    - $\delta(q_1,a) = (q_0,a)$, $\delta(q_1,\square) = (q_0,\rightarrow)$, $\delta(q_1,\triangleright) = (q_1,\rightarrow)$
- Για την ταινία $\triangleright \underline{a}a\square aaa$
  - υπογραμμισμένο το τρέχον σύμβολο
- ... το Μ υπολογίζει ως εξής:
  - $\triangleright \underline{a}a\square aaa$ (κατάσταση $s=q_0$) και λόγω $\delta(q_0,a) = (q_1,\square)$ →
  - $\triangleright \underline{\square}a\square aaa$ (κατάσταση q_1) και λόγω $\delta(q_1,\square) = (q_0,\rightarrow)$ →
  - $\triangleright \square\underline{a}\square aaa$ (κατάσταση q_0) και λόγω $\delta(q_0,a) = (q_1,\square)$ →
  - $\triangleright \square\underline{\square}\square aaa$ (κατάσταση q_1) και λόγω $\delta(q_1,\square) = (q_0,\rightarrow)$ →
  - $\triangleright \square\square\underline{\square}aaa$ (κατάσταση q_0) και λόγω $\delta(q_0,\square) = (h, \square)$ →
  - $\triangleright \square\square\underline{\square}aaa$ (κατάσταση **h**) οπότε σταματά.

Ολικές καταστάσεις

- Ολική κατάσταση C = ο συνδυασμός της τρέχουσας κατάστασης q και της θέσης της κεφαλής στην ταινία
  - $C \in K \times \triangleright\Sigma^* \times (\Sigma^*(\Sigma-\{\square\}) \cup \{e\})$ ή απλούστερα
  - $C = (q, w\underline{a}u)$ όπου
    - $q \in K$
    - $w \in \triangleright\Sigma^*$
    - $a \in \Sigma$
    - $u \in \Sigma^* \cup \{e\}$ ΑΛΛΑ το τελευταίο στοιχείο του u ΔΕΝ μπορεί να είναι το □ ΕΚΤΟΣ αν είναι το τρέχον
  - **Άρα αγνούμε τα κενά στο τέλος της ταινίας**
  - Παραδείγματα
    - Επιτρεπτές: $C=(q, \triangleright ba\underline{a}b)$, $C=(q, \triangleright baa\underline{b})$, $\mathbf{C=(q, \triangleright baab\underline{\square})}$
    - Μή επιτρεπτή: $\mathbf{C=(q, \triangleright ba\underline{a}b\square)}$
- Όπως και στα πεπερασμένα αυτόματα, η ολική κατάσταση καθορίζει πλήρως τη συνέχεια των υπολογισμών της ΜΤ

Παραγωγή

- Παραγωγή μιας ολικής κατάστασης C' από την C σε ένα βήμα = η C' είναι η ολική κατάσταση στην οποία θα βρεθεί η ΜΤ αμέσως μετά την C
  - $C \Rightarrow C'$
- Παραγωγή μιας ολικής κατάστασης C' από την C = η C' είναι ολική κατάσταση στην οποία θα βρεθεί η ΜΤ μετά την C και αφού εκτελεστούν μηδέν (0) ή περισσότερα βήματα
  - $C \Rightarrow_M^* C'$
- Ειδικότερα ονομάζουμε υπολογισμό n βημάτων τη διαδοχή παραγωγών: $C_0 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_n$
  - Γράφουμε $C_0 \Rightarrow_M^n C_n$
  - Ισχύει βέβαια ότι $C_0 \Rightarrow_M^* C_n$

Σύνθεση ΜΤ

- Μία ΜΤ Μ προκύπτει από τη σύνθεση απλούστερων ΜΤ σύμφωνα με το εξής παράδειγμα:

$$M = \begin{tikzcd} >M_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"] & M_2 \\ M_3 \end{tikzcd}$$

- Η ΜΤ Μ ξεκινά προσομοιώνοντας την M_1. Αν η M_1 σταματήσει και το τρέχον σύμβολο είναι a ξεκινά η M_2 ενώ αν το τρέχον σύμβολο είναι το b ξεκινά η M_3. Και στις δύο περιπτώσεις η νέα ολική κατάσταση έχει κατάσταση την αρχική κατάσταση της M_2 ή M_3 και την ταινία όπως την άφισε η M_1.
- Η σύνθεση βασίζεται στις εξαιρετικά απλές (βασικές) ΜΤ της επόμενης ενότητας.

Παραδείγματα σύνθεσης - συμβολισμοί

$>M_1 \xrightarrow{a\in\Sigma} M_2$ **ή** $>M_1 \longrightarrow M_2$ **ή** M_1M_2

$>M \longrightarrow M$ **ή** M^2

$>M_1 \xrightarrow{a \neq b} M_2$ **ή** $>M_1 \xrightarrow{\sim b} M_2$

Έτσι για παράδειγμα η ΜΤ La ≡ $M_{\leftarrow} \longrightarrow M_a$

Βασικές ΜΤ

- Εγγραφέας Συμβόλων / Μετακίνηση κεφαλής:
  - Για $a \in \Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\} - \{\triangleright\}$
  - Ορίζουμε τη ΜΤ $\mathbf{M_a} = (\{s,h\},\Sigma,\delta,s,\{h\})$ με δ τέτοιο ώστε:
    - $\delta(s,b) = (h,a) \quad \forall b \in \Sigma - \{\triangleright\}$
    - $\delta(s, \triangleright) = (s, \rightarrow)$
  - Αυτές οι απλές ΜΤ:
    - Αντικαθιστούν όλα τα σύμβολα της ταινίας με το a αν $a \in \Sigma$
      - τότε καταχρηστικά χρησιμοποιούμε το συμβολισμό "a" αντί M_a
    - Μετακινούν απλώς την κεφαλή αριστερά ή δεξιά αν $a \in \{\leftarrow, \rightarrow\}$
      - τότε χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $L= M_{\leftarrow}$ και $R = M_{\rightarrow}$

Απλές (σύνθετες) ΜΤ

$R_{\square} = \; >R \circlearrowright^{\sim\square}$ Βρίσκει το πρώτο □ προς τα δεξιά

$L_{\square} = \; >L \circlearrowright^{\sim\square}$ Βρίσκει το πρώτο □ προς τα αριστερά

$R_{\sim\square} = \; >R \circlearrowright^{\square}$ Βρίσκει τον πρώτο μή κενό χαρακτήρα (≠ □) προς τα δεξιά

$L_{\sim\square} = \; >L \circlearrowright^{\square}$ Βρίσκει τον πρώτο μή κενό χαρακτήρα (≠ □) προς τα αριστερά

Μηχανή αντιγραφής (C)

$$C = \begin{tikzcd} {>}L_{\square} \arrow[r] & R \arrow[r, "a\neq\square"] \arrow[d, "a=\square"] & \square R_{\square}^{2}\, a\, L_{\square}^{2}\, a \arrow[l, bend right] \\ & R_{\square} & \end{tikzcd}$$

- Αυτή η ΜΤ δημιουργεί ένα αντίγραφο του περιεχομένου της ταινίας, δηλαδή για $w \in (\Sigma - \{\square, \triangleright\})^*$
  - από την ταινία $\square w \underline{\square}$
  - παράγει την ταινία $\square w \square w \underline{\square}$
- (αποδείξτε το)

Μηχανή ολίσθησης δεξιά ($S_{\rightarrow}$)

$$S_{\rightarrow} = \begin{tikzcd} {>}L \arrow[r, "a\neq\square"] \arrow[d, "a=\square"] & \square R a L \arrow[l, bend right] \\ R_{\square}^{2} & \end{tikzcd}$$

- Αυτή η ΜΤ ολισθαίνει το περιεχόμενο της ταινίας μία θέση προς τα δεξιά, δηλαδή για $w \in (\Sigma - \{\square, \triangleright\})^*$
  - από την ταινία $\square w \underline{\square}$
  - παράγει την ταινία $\square \square w \underline{\square}$
- (αποδείξτε το)

Υπολογισμοί με MT

Ορισμός #1:

Έστω MT $M=(K,\Sigma,\delta,s,\{y,n\})$

- y=yes , n=no

και συμβολοσειρά $w\in(\Sigma-\{\square, \triangleright\})^*$. Ορίζουμε ότι:

Η MT M **αποδέχεται** το w αν $(s, \triangleright\underline{\square}w) \Rightarrow_M^* (y, xxx)$

Η MT M **απορρίπτει** το w αν $(s, \triangleright\underline{\square}w) \Rightarrow_M^* (n, xxx)$

όπου xxx αντιπροσωπεύει οποιαδήποτε περιεχόμενο της ταινίας

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν η MT M δεν καταλήγει σε κατάσταση τερματισμού (καθώς διαβάζει το συγκεκριμένο περιεχόμενο της ταινίας) τότε η M ούτε αποδέχεται ούτε απορρίπτει!

Υπολογισμοί με MT (συνέχεια)

Ορισμός #2:

Αν $\Sigma_0 \subseteq \Sigma-\{\square, \triangleright\}$ και η γλώσσα $L \subseteq \Sigma_0^*$ τότε η MT M **αποφασίζει** τη γλώσσα L αν:

η M αποδέχεται κάθε $w\in L$ **και**

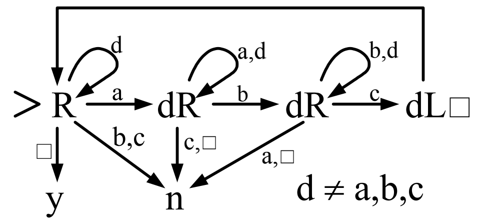
η M απορρίπτει κάθε $w\notin L$

Ορισμός #3:

Μία γλώσσα L λέγεται **αναδρομική** αν υπάρχει MT που την αποφασίζει.

Παράδειγμα: Η αναδρομική γλώσσα L={$a^n b^n c^n$, n≥0}

- Έχουμε ήδη δείξει ότι αυτή η γλώσσα L δεν είναι ούτε κανονική ούτε χωρίς συμφραζόμενα
- Είναι όμως αναδρομική γιατί την αποφασίζει η παρακάτω MT



όπου η MT y κάνει απλώς τη νέα κατάσταση y (yes) και η MT n κάνει τη νέα κατάσταση n (no)

Υπολογισμοί Συναρτήσεων με MT

Ορισμός #1:

Έστω MT M=(K,Σ,δ,s,{h})

και συμβολοσειρά w ∈ Σ_0* όπου $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\square, \triangleright\}$.

Ορίζουμε ότι η συμβολοσειρά y ∈ Σ_0* είναι η **έξοδος** της MT M στην **είσοδο** w (γράφουμε y=M(w)) όταν:

$$(s, \triangleright\underline{\square}w) \Rightarrow_M^* (h, \triangleright\underline{\square}y)$$

Ορισμός #2:

Έστω συνάρτηση f: $\Sigma_0^* \to \Sigma_0^*$. Η παραπάνω MT **υπολογίζει** την f αν f(w)=M(w) για κάθε w ∈ Σ_0*

Ορισμός #3:

Η συνάρτηση f: $\Sigma_0^* \to \Sigma_0^*$ λέγεται **αναδρομική** αν υπάρχει MT που την υπολογίζει

Αριθμητικοί Υπολογισμοί με ΜΤ

Η συμβολοσειρά $w=a_1a_2\ldots a_n \in \{0,1\}^*$ αποτελεί διαδική αναπαράσταση του φυσικού αριθμού

$$num(w)=a_1 2^{n-1}+a_2 2^{n-2}+\ldots+a_n 2^0$$

Αντιστρόφως για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει η αντίστοιχη διαδική αναπαράσταση $w \in 0\cup 1(0\cup 1)^*$

Ορισμός #1:

Έστω ΜΤ $M=(K,\Sigma,\delta,s,\{h\})$ όπου $0,1 \in \Sigma$ και επιπλέον ο βοηθητικός χαρακτήρας **;** $\in \Sigma$. Έστω επίσης $f: N^k \to N$ $(k>0)$

Η ΜΤ M **υπολογίζει** την f αν για κάθε $w_1,w_2,\ldots,w_k \in 0\cup 1(0\cup 1)^*$

$num(M(w_1;w_2;\ldots;w_k)) = f(num(w_1), num(w_2), \ldots, num(w_k))$

Ορισμός #2:

Μία συνάρτηση $f: N^k \to N$ $(k>0)$ λέγεται **αναδρομική** αν υπάρχει ΜΤ που την υπολογίζει

Αναδρομικά Απαριθμήσιμες Γλώσσες

Ορισμός #1:

Έστω ΜΤ $M=(K,\Sigma,\delta,s,H)$ και $L\subseteq\Sigma_0^*$ όπου $\Sigma_0 \subseteq \Sigma-\{\square, \triangleright\}$.

Η ΜΤ M **ημιαποφασίζει** τη γλώσσα L αν $\forall$ $w\in \Sigma_0^*$ ισχύει:

"$w \in L$ αν και μόνο αν η ΜΤ M σταματά όταν δεχθεί είσοδο w"

(δεν μας ενδιαφέρει σε ποιά ολική κατάσταση σταματά)

Ορισμός #2:

Μία γλώσσα L είναι **αναδρομικά απαριθμήσιμη** αν υπάρχει ΜΤ που την ημιαποφασίζει

Θεωρήματα (χωρίς απόδειξη):

1. Αν η L είναι αναδρομική τότε είναι και αναδρομικά απαριθμήσιμη (υπάρχουν όμως αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες που δεν είναι αναδρομικές)
2. Αν η L είναι αναδρομική τότε και το συμπλήρωμά της (Σ_0^*-L) είναι αναδρομική γλώσσα

Μη Αιτιοκρατικές ΜΤ (ΜΑΜΤ)

- Η διατεταγμένη πεντάδα Μ=(Κ, Σ, Δ, s, H) όπου τα Κ, Σ, s, H είναι όπως στις ΜΤ αλλά το σύνολο Δ είναι σχέση:

$$\Delta \subseteq ((K-H)\times\Sigma) \times (K\times(\Sigma-\{\leftarrow,\rightarrow\}))$$

(και **όχι** συνάρτηση όπως η δ: $((K-H)\times\Sigma) \rightarrow (K\times(\Sigma-\{\leftarrow,\rightarrow\}))$ στις συμβατικές ΜΤ)

λέγεται **Μη Αιτιοκρατική ΜΤ**.

Σε μία ΜΑΜΤ (κατ΄αναλογία με τα ΜΑΠΑ) από μία ολική κατάσταση μπορεί να παραχθούν περισσότερες της μίας νέες ολικές καταστάσεις.

Μη Αιτιοκρατικές ΜΤ (ΜΑΜΤ) (συνέχεια -1)

Ορισμός #1:

Η ΜΑΜΤ Μ = (Κ, Σ, Δ, s, H) **αποδέχεται** την είσοδο $w \in (\Sigma-\{\square, \triangleright\})^*$ αν

$(s, \triangleright\underline{\square}w) \Rightarrow_M^* (h, \triangleright u\underline{a}v)$ για κάποιο $h\in H$ και $a\in\Sigma$, $u, v \in \Sigma^*$

Σημείωση: η ΜΑΜΤ αποδέχεται το w ακόμη και αν υπάρχουν υπολογισμοί (από τους πολλούς που διενεργούνται παράλληλα που δεν καταλήγουν σε κατάσταση τερματισμού)

Μη Αιτιοκρατικές ΜΤ (ΜΑΜΤ) (συνέχεια - 2)

Ορισμός #2:

Η ΜΑΜΤ $M = (K, \Sigma, \Delta, s, H)$ **ημιαποφασίζει** τη γλώσσα $L \subseteq (\Sigma\text{-}\{\square, \triangleright\})^*$ αν $\forall\ w \in (\Sigma\text{-}\{\square, \triangleright\})^*$ ισχύει:

$w \in L$ αν και μόνον αν η ΜΑΜΤ M αποδέχεται τη συμβολοσειρά w

Μη Αιτιοκρατικές ΜΤ (ΜΑΜΤ) (συνέχεια - 3)

Ορισμός #3:

Η ΜΑΜΤ $M = (K, \Sigma, \Delta, s, \{y,n\})$ **αποφασίζει** τη γλώσσα $L \subseteq (\Sigma\text{-}\{\square, \triangleright\})^*$ αν ισχύουν τα ακόλουθα $\forall\ w \in (\Sigma\text{-}\{\square, \triangleright\})^*$:

1. Υπάρχει (αρκετά μεγάλος) φυσικός αριθμός N=N(M,w) τέτοιος ώστε κανένας υπολογισμός που ξεκινά από την ολική κατάσταση $(s, \triangleright\underline{\square}w)$ δεν διαρκεί πάνω από N βήματα (δηλ. **δεν υπάρχει** ολική κατάσταση C για την οποία $(s, \triangleright\underline{\square}w) \Rightarrow_M^N C$)
2. $w \in L$ αν και μόνο αν $(s, \triangleright\underline{\square}w) \Rightarrow_M^* (y, \triangleright u\underline{a}v)$ για κάποια $a \in \Sigma$, $u, v \in \Sigma^*$

Μη Αιτιοκρατικές ΜΤ (ΜΑΜΤ) (συνέχεια - 4)

Ορισμός #4:

Η ΜΑΜΤ $M = (K, \Sigma, \Delta, s, H)$ **υπολογίζει** τη συνάρτηση $f: (\Sigma\text{-}\{\square, \triangleright\})^* \rightarrow (\Sigma\text{-}\{\square, \triangleright\})^*$ αν ισχύουν τα ακόλουθα $\forall\ w \in (\Sigma\text{-}\{\square, \triangleright\})^*$:

1. Υπάρχει (αρκετά μεγάλος) φυσικός αριθμός $N=N(M,w)$ τέτοιος ώστε κανένας υπολογισμός που ξεκινά από την ολική κατάσταση $(s, \triangleright\underline{\square}w)$ δεν διαρκεί πάνω από N βήματα (όπως και πριν)
2. $(s, \triangleright\underline{\square}w) \Rightarrow_M^* (h, u\underline{a}v)$ με $h\in H$ αν και μόνο αν $ua = \triangleright\square$ **και** $v=f(w)$

Σημείωση: Από 1 & 2 προκύπτει ότι όλοι οι εναλλακτικοί υπολογισμοί τερματίζουν (όχι όμως αναγκαστικά στην ίδια κατάσταση ούτε με το ίδιο πλήθος βημάτων) και μάλιστα δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα f(w)

Ισοδυναμία ΜΑΜΤ και ΜΤ

- Αν μία ΜΑΜΤ
  - ημιαποφασίζει ή αποφασίζει μία γλώσσα ή
  - υπολογίζει μία συνάρτηση

τότε υπάρχει συμβατική ΜΤ που κάνει το ίδιο

Γραμματικές (χωρίς περιορισμούς)

Ορισμός: Μία Γραμματική (χωρίς περιορισμούς) είναι μία τετράδα G=(V,Σ,R,S) όπου:

- V είναι ένα επεκτεταμένο αλφάβητο
- Σ είναι το σύνολο των Τερματικών Συμβόλων (ΤΣ) δηλαδή το κλασσικό μας αλφάβητο. $\Sigma \subseteq V$.
- R το σύνολο των κανόνων της γραμματικής με
  $R \subseteq (V^*(V-\Sigma V^*) \times V^*$ (όπου V^* όλες οι συμβολοσειρές του V)
- S το Σύμβολο Εκκίνησης (ΣΕ) $\in V-\Sigma$
  - Το V-Σ είναι το σύνολο Μη Τερματικών Συμβόλων (ΜΤΣ)

Σημείωση: Η διαφορά των Γραμματικών (χωρίς περιορισμούς) από τις ΓΧΣ συνίσταται στη μορφή των κανόνων R. Σε αντίθεση με τις ΓΧΣ οι Γραμματικές (χωρίς περιορισμούς) μπορεί να περιέχουν κανόνες της μορφής $CA \rightarrow AC$, $uAv \rightarrow uBw$ κ.λπ. (που λαμβάνουν υπόψη τα "συμφραζόμενα" των μη τερματικών συμβόλων)

Γλώσσες που γεννιούνται από Γραμματικές (χωρίς περιορισμούς)

- Η γλώσσα $L=L(G) \subseteq \Sigma^*$ γεννιέται από τη Γραμματική (χωρίς περιορισμούς) G αν όλες οι συμβολοσειρές της γεννιούνται από την G

Θεώρημα (χωρίς απόδειξη):

Μία γλώσσα L=L(G) γεννιέται από μία Γραμματική (χωρίς περιορισμούς) G αν και μόνον αν είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη

Παράδειγμα Λειτουργίας Γραμματικής

- Έστω G=(V,Σ,R,S) με
  - V={S, a, b, c, A, B, C, T_a, T_b, T_c}
  - Σ={a, b, c}
  - R = {$S \to ABCS$, $S \to T_c$
    $CA \to AC$, $BA \to AB$, $CB \to BC$,
    $CT_c \to T_c c$, $CT_c \to T_b c$, $BT_b \to T_b b$, $BT_b \to T_a b$, $AT_a \to T_a a$
    $T_a \to e$ }
  - S=S
- Παράδειγμα γέννεσης (παραγωγής) συμβολοσειρών:
  $S \Rightarrow ABCS \Rightarrow ABC\,T_c \Rightarrow ABT_b c \Rightarrow AT_a bc \Rightarrow T_a abc \Rightarrow abc$
- Εύκολα φαίνεται ότι αυτή η Γραμματική (χωρίς περιορισμούς) G γεννά τη γλώσσα $L(G) = \{a^n b^n c^n : n \geq 1\}$ (δείξτε το) που ήδη ξέρουμε ότι είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη!

Υπολογιστική Πολυπλοκότητα και Γλώσσες

- Η διαδικασία λήψης της απόφασης για το αν μία συμβολοσειρά ανήκει σε μία γλώσσα έχει υπολογιστική πολυπλοκότητα που καθορίζεται από τον αριθμό βημάτων
  - της ΜΤ η ΜΑΜΤ που την (ημι-)αποφασίζει για
    - τις αναδρομικές και
    - τις αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες
  - ή του αυτόματου στοίβας που την αποδέχεται
    - για τις γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα
  - ή του πεπερασμένου αυτόματου (ΑΠΑ ή ΜΑΠΑ) που την αποδέχεται
    - για τις κανονικές γλώσσες

Υπολογιστική Πολυπλοκότητα και Γλώσσες – 2

- Μία ευρεία κατηγορία **προβλημάτων** μπορούν να εκφραστούν σαν προβλήματα αναγνώρισης των συμβολοσειρών μίας από τις παραπάνω γλώσσες
- Κατά συνέπεια η πολυπλοκότητα των προβλημάτων αυτών και των **αλγορίθμων** επίλυσής τους συμπίπτει με την πολυπλοκότητα της αντίστοιχης γλώσσας

Η κλάση *P*

- Μία ΜΤ Μ είναι **πολυωνυμικά φραγμένη** όταν υπάρχει πολυώνυμο p(n) τέτοιο ώστε να ισχύει:

Για κάθε είσοδο x δεν υπάρχει ολική κατάσταση C τέτοια ώστε $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \Rightarrow_M^{p(|x|)+1} C$

- Δηλαδή κανένας υπολογισμός δεν διαρκεί παραπάνω από p(|x|) βήματα.
- Μία γλώσσα λέγεται **πολυωνυμικά αποφασιζόμενη (*P*olynomially decidable)** όταν την αποφασίζει μία πολυωνυμικά φραγμένη ΜΤ
- Η **κλάση** των πολυωνυμικά αποφασιζόμενων γλωσσών λέγεται ***P***

Η κλάση *NP*

- Μία **ΜΑΜΤ** Μ είναι **πολυωνυμικά φραγμένη** όταν υπάρχει πολυώνυμο p(n) τέτοιο ώστε να ισχύει:

Για κάθε είσοδο x δεν υπάρχει ολική κατάσταση C τέτοια ώστε $(s, \triangleright\underline{\square}w) \Rightarrow_M^{p(|x|)+1} C$

- Δηλαδή κανένας υπολογισμός (από τους πολλούς που εκτελούνται ταυτόχρονα λόγω του "Μη Αιτιοκρατικού") δεν διαρκεί παραπάνω από p(|x|) βήματα.
- Μία γλώσσα λέγεται **μη αιτιοκρατικά πολυωνυμικά αποφασιζόμενη** (***N***on-deterministic ***P***olynomially decidable) όταν την αποφασίζει μία πολυωνυμικά φραγμένη **ΜΑΜΤ**
- Η **κλάση** των **μη αιτιοκρατικά** πολυωνυμικά αποφασιζόμενων γλωσσών λέγεται ***NP***

Η κλάση *EXP*

- Μία ΜΤ Μ είναι **εκθετικά φραγμένη** όταν υπάρχει πολυώνυμο p(n) τέτοιο ώστε να ισχύει:

Για κάθε είσοδο x δεν υπάρχει ολική κατάσταση C τέτοια ώστε $(s, \triangleright\underline{\square}w) \Rightarrow_M 2^{p(|x|)+1} C$

- Δηλαδή κανένας υπολογισμός δεν διαρκεί παραπάνω από $2^{p(|x|)}$ βήματα.
- Μία γλώσσα λέγεται **εκθετικά αποφασιζόμενη** (***EXP***onentially decidable) όταν την αποφασίζει μία εκθετικά φραγμένη ΜΤ
- Η **κλάση** των εκθετικά αποφασιζόμενων γλωσσών λέγεται ***EXP***

Η σχέση μεταξύ των κλάσεων
P, NP, EXP

$$\boldsymbol{P \subseteq NP \subseteq EXP}$$