

# Γραφική με Υπολογιστές

*A. Ντελόπουλος*

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών  
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Άνοιξη 2003

# Περιεχόμενα

<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>4</b>
1.1 Τί είναι η Γραφική με Υπολογιστές;	4
1.2 Είναι αυτό επιστήμη;	5
1.3 Ο κύκλος ζωής των γραφικών	5
1.3.1 Modeling	5
1.3.2 Εφαρμογή Γραφικών	7
1.3.3 Υποσύστημα Δημιουργίας Γραφικών (Graphics Generation)	8
1.3.4 Απεικόνιση Γραφικών - Display	8
<b>2 Υποσύστημα Απεικόνισης Γραφικών (Display)</b>	<b>9</b>
2.1 Οι χρησιμοποιούμενες Συσκευές	9
2.2 Αναπαράσταση του Χρώματος	9
2.2.1 Ο μηχανισμός προσέγγισης του Χρώματος από μείγμα βασικών χρωμάτων	9
2.2.2 Συστήματα Χρωματικών Συντεταγμένων	13
2.2.3 Δεικτοδότηση Χρώματος	15
<b>3 Εφαρμογή Γραφικών και Υποσύστημα Δημιουργίας Γραφικών</b>	<b>16</b>
3.1 Χάραξη Γραμμών - Scan Line Conversion	16
3.1.1 Χάραξη ευθύγραμμων τμημάτων	16
3.1.2 Χάραξη κύκλων	21
3.2 Πλήρωση Κλειστών Σχημάτων - Filling	25
<b>4 Διανύσματα και Σημεία</b>	<b>26</b>
4.1 Διανυσματικοί χώροι	26
4.1.1 Βάσεις και διάσταση διανυσματικού χώρου	28
4.1.2 Συστήματα συντεταγμένων διανυσματικού χώρου	28
4.1.3 Διανυσματικοί Μετασχηματισμοί, Γραμμικοί Μετασχηματισμοί, Μετασχηματισμοί Affine	29

4.1.4	Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων διανυσματικού χώρου . . . . .	30
4.2	Χώροι Σημείων . . . . .	31
4.2.1	Συστήματα συντεταγμένων χώρου σημείων . . . . .	32
4.2.2	Μετασχηματισμοί και Ομογενείς Συντεταγμένες Σημείου . . . . .	32
4.2.3	Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων χώρου σημείων . . . . .	33
4.3	Οι Γεωμετρικοί διανυσματικοί χώροι $R^n$ . . . . .	34
4.4	Ο χώρος των τριών διαστάσεων . . . . .	35
4.4.1	Καρτεσιανές και ομογενείς συντεταγμένες . . . . .	36
4.4.2	Μετασχηματισμοί affine στις 3 διαστάσεις . . . . .	37
4.4.3	Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων . . . . .	43
4.5	Ο χώρος των δύο διαστάσεων . . . . .	44
4.5.1	Μετασχηματισμοί affine και αλλαγή συστήματος συντεταγμένων στις 2 διαστάσεις . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Θέαση του τρισδιάστατου κόσμου: Από τις 3 στις 2 Διαστάσεις</b>	<b>46</b>
5.1	Εισαγωγή στις προβολές με στοιχεία φυσικής οπτικής . . . . .	46
5.2	Μετασχηματισμοί προοπτικής και ορθογραφικής προβολής . . . . .	48
5.2.1	Προοπτική προβολή . . . . .	48
5.2.2	Ορθογραφική προβολή . . . . .	49
5.3	Μετασχηματισμοί θέασης . . . . .	50
5.3.1	Προσδιορισμός της θέσης μίας εικονικής κάμερας . . . . .	50
5.3.2	Από το WCS στο σύστημα συντεταγμένων της κάμερας . . . . .	51
5.3.3	Το οπτικό πεδίο της κάμερας . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Αποκοπή (clipping)</b>	<b>55</b>
6.1	Αποκοπή από επίπεδα κυρτά πολύγωνα . . . . .	56
6.1.1	Αποκοπή ευθυγράμμων τμημάτων . . . . .	56
6.1.2	Αποκοπή τριγώνων . . . . .	60
6.2	Αποκοπή από τρισδιάστατα κυρτά πολύεδρα . . . . .	60
<b>7</b>	<b>Αναπαράσταση καμπυλών και επιφανειών</b>	<b>62</b>
7.1	Προσέγγιση μέσω τεθλασμένης γραμμής ή πολυέδρου . . . . .	64
7.1.1	Προσέγγιση καμπύλης γραμμής . . . . .	64
7.1.2	Προσέγγιση επιφάνειας . . . . .	64
7.2	Προσέγγιση μέσω αναπτύγματος σε συναρτήσεις βάσης . . . . .	65
7.2.1	Πολυώνυμα Βάσης . . . . .	66

7.2.2 Προσέγγιση καμπύλης γραμμής (Bezier Curves) . . . . .	67
7.2.3 Προσέγγιση επιφάνειας . . . . .	70
7.3 Μετασχηματισμοί affine καμπύλων γραμμών και επιφανειών . . . . .	72
<b>8 Φωτισμός (Illumination)</b>	<b>73</b>
8.1 Βασικοί ορισμοί και παραδοχές . . . . .	73
8.2 Απλά (ευριστικά) μοντέλα φωτισμού . . . . .	73
8.2.1 Αυτοφωτισμός . . . . .	73
8.2.2 Διάχυτο φως από το περιβάλλον (ambient light) . . . . .	73
8.2.3 Διάχυτη ανάκλαση (diffuse reflection - Lambertian reflection) . . . . .	74
8.2.4 Κατοπτρική ανάκλαση . . . . .	76
8.2.5 Το συνολικό μοντέλο φωτισμού . . . . .	77
8.3 Μοντέλα φωτισμού με βάση τη φυσική οπτική . . . . .	82

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Τί είναι η Γραφική με Υπολογιστές;

Η *Γραφική με Υπολογιστές*, ορολογία που προέρχεται από μετάφραση της αγγλικής Computer Graphics, είναι ο κλάδος της επιστήμης των υπολογιστών που ασχολείται με τη μεθοδολογία δημιουργίας *συνθετικών* οπτικών αναπαραστάσεων σε *ψηφιακή μορφή*. Προορισμός των αναπαραστάσεων αυτών είναι κατά περίπτωση η προβολή τους στις οθόνες υπολογιστών, η προβολή τους με τη χρήση προβολέων βίντεο, η εμφάνισή τους στην τηλεόραση, η εκτύπωσή τους σε χαρτί ή και σε κινηματογραφικό φιλμ.

Συνεπώς η Γραφική με Υπολογιστές ασχολείται με το πώς η περιγραφή ενός *μοντέλου* που έχει περιγραφεί από τον άνθρωπο/χρήστη μπορεί να μετατραπεί σε ψηφιακή εικόνα προκειμένου να αποτυπωθεί σε ένα από τα προαναφερθέντα μέσα. Μερικά τυπικά παραδείγματα-εφαρμογές ίσως είναι πιο διαφωτιστικά:

1. Η εμφάνιση/εκτύπωση κειμένου.
2. Η χάραξη γραφικών παραστάσεων ή σχεδίων.
3. Η "ρεαλιστική" αποτύπωση τρισδιάστων συνθετικών αντικειμένων (μακέτες) σε εφαρμογές CAD.
4. Η αποτύπωση (κινούμενων) συνθετικών χαρακτήρων (ανθρωπόμορφων ή όχι) ή/και συνθετικού περιβάλλοντος (αντικείμενα, κτίρια, φωτισμός, σκιές) σε βίντεο ή φιλμ.
5. Η προβολή συνθέσεων όπως οι παραπάνω στην οθόνη υπολογιστή (π.χ. computer games). Αξίζει να επισημάνουμε ότι οι εφαρμογές αυτού του είδους έχουν τη σημαντικότερη επιπλέον απαίτηση για ταχεία - real time - οπτική αναπαραγωγή.

## 1.2 Είναι αυτό επιστήμη ;

Περιδιαβαίνοντας ένα οποιοδήποτε τεχνικό βιβλιοπωλείο, είναι αλήθεια ότι, στα ράφια με την ένδειξη γραφική με υπολογιστές θα συναντήσει κανείς μία πληθώρα βιβλίων που στην πραγματικότητα είναι εγχειρίδια χρήσης πακέτων λογισμικού που χρησιμοποιούνται για τη σχεδίαση και αναπαραγωγή συνθετικών κόσμων όπως οι προαναφερθέντες. Είναι επίσης αλήθεια ότι η γραφική με υπολογιστές έχει, στην κοινή γλώσσα, ταυτιστεί με την τέχνη και την τεχνική των χειριστών των εν λόγω προγραμμάτων.

Ωστόσο, αυτό που αληθινά απασχολεί την επιστήμη της γραφικής με υπολογιστές είναι :

- Η σχεδίαση δομών δεδομένων για την εύχρηστη αναπαράσταση των συνθετικών μοντέλων και των ιδιοτήτων τους.
- Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, κυρίως, αναλυτικής γεωμετρίας, γραμμικής άλγεβρας και μαθηματικής ανάλυσης.
- Η σχεδίαση αλγορίθμων που διαχειρίζονται τις παραπάνω δομές δεδομένων και αξιοποιούν τις λύσεις των προαναφερθέντων μαθηματικών προβλημάτων.
- Η σχεδίαση του κατάλληλου hardware για την ταχεία υλοποίηση των αλγορίθμων.

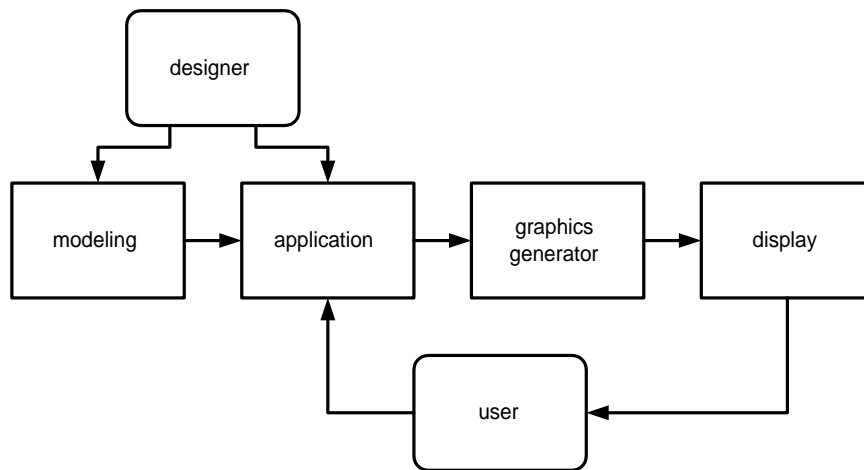
Στο παρόν κείμενο θα επικεντρώσουμε στα τρία πρώτα στοιχεία και θα αναφερθούμε στο hardware μόνο αποσπασματικά, όπου η αναφορά αυτή απαιτείται για την κατανόηση των σχεδιαστικών επιλογών των αντίστοιχων αλγορίθμων.

## 1.3 Ο κύκλος ζωής των γραφικών

Έχει ήδη αναφερθεί ότι ένα ολοκληρωμένο σύστημα γραφικών χρησιμοποιείται για να παράγει και προβάλλει εικόνες (ακίνητες ή κινούμενες) που έχει *συνδέσει* ένας αρχικός δημιουργός (designer) και στις οποίες έχει ενδεχομένως *παρέμβει* κάποιος άλλος χρήστης (user) του συστήματος. Όσον αφορά στο ίδιο το σύστημα γραφικών, η λειτουργία του μπορεί να αναλυθεί σε τέσσερα υποσυστήματα. Ο διαχωρισμός αυτός - αν και όχι πάντοτε ευδιάκριτος - βοηθά στην κατανόηση της ακολουθούμενης μεθοδολογίας. Η διαδοχή των τεσσάρων υποσυστημάτων αναπαρίσταται στο Σχήμα 1.1 και αναλύεται παρακάτω.

### 1.3.1 Modeling

Το πρώτο στάδιο στη λειτουργία του συστήματος γραφικών είναι η περιγραφή της ιδέας του δημιουργού μέσω της κατασκευής ενός *μοντέλου* που την περιγράφει.



Σχήμα 1.1: Ο κύκλος ζωής των γραφικών

Ακόμη και στην απλούστερη εφαρμογή γραφικής με υπολογιστές - όπως αυτή της δημιουργίας μίας σελίδας κειμένου που στο τελικό στάδιο της διαδικασίας θα τυπωθεί σε χαρτί - ο δημιουργός προετοιμάζει καταγράφει τη σύλληψη της ιδέας του υπό τη μορφή χαρακτήρων (ASCII) εμπλουτισμένων με τυπογραφικού είδους πληροφορίες όπως αυτές του τί είδους font θα χρησιμοποιηθεί, πώς επιθυμεί να γίνει η στοίχιση των γραμμών, τί φόντο θα χρησιμοποιηθεί κ.λπ.

Σε πιο σύνθετες εφαρμογές, όπως αυτή της κατασκευής μίας βιομηχανικής ή αρχιτεκτονικής μακέτας με τη χρήση υπολογιστή (CAD) ο δημιουργός αναλαμβάνει να περιγράψει αρκετά πιο σύνθετα μοντέλα τα οποία έχουν πολύ *πλουσιότερες ιδιότητες* όπως αυτές του τρισδιάστατου σχήματος, του χρώματος, της υφής (texture), του φωτισμού, της σιλιπνότητας, κ.λπ.

Όταν μάλιστα εξετάσουμε εφαρμογές γραφικών που εμπεριέχουν κίνηση, στις παραπάνω ιδιότητες προστίθενται *κινηματικές* φυσικές ιδιότητες όπως η αδράνεια, η ελαστικότητα, ο συντελεστής τριβής κ.λπ.

Τέλος, αν ο δημιουργός επιθυμεί να επιτρέψει τη ζωντανή αλληλεπίδραση του τελικού χρήστη με το δημιούργημά του, τότε πρέπει να επαυξήσει τις ιδιότητές του με *μεθόδους αλληλεπίδρασης*. Για παράδειγμα σε εφαρμογές όπως αυτές των computer games το μοντέλο πρέπει να εμπεριέχει την πληροφορία του τι θα κάνει όταν ο χρήστης δώσει τη μία ή την άλλη εντολή.

Μερικές παρατηρήσεις είναι χρήσιμες στο σημείο αυτό :

1. Κατά τη φάση της μοντελοποίησης καταγράφεται με δομημένο τρόπο η ιδέα που έχει ο δημιουργός για το τελικό προϊόν του συστήματος γραφικών χωρίς όμως στο στάδιο αυτό να υπάρχει οπτικοποίηση του αποτελέσματος. Θεωρητικά ένας τυφλός δημιουργός μπορεί άριστα να φέρει σε πέρας τη διαδικασία της μοντελοποίησης με την ίδια λογική που ένας κουφός συνθέτης μπορεί να καταγράψει την έμπνευσή του σε παρτιτούρες χωρίς να ακούει το ηχητικό του δημιούργημα. Στην πράξη βέβαια τα περισσότερα συστήματα γραφικών

υποστηρίζουν το στάδιο της μοντελοποίησης παρέχοντας στο δημιουργό ένα είδος ανατροφοδότησης σπεύδοντας να μιμούνται (έστω και σε χαμηλή ποιότητα) τα τρία επόμενα στάδια του συνολικού συστήματος γραφικών (βλ. WYSIWYG word processors).

2. Κατά τη δημιουργία του μοντέλου ο δημιουργός (επανα)χρησιμοποιεί έτοιμα δομικά στοιχεία τα οποία ανακαλεί χωρίς να χρειάζεται να τα δημιουργήσει. Έτσι για παράδειγμα, επιλέγει τη χρήση κάποιου φοντ όταν στοιχειοθετεί ένα κείμενο ή χρησιμοποιεί επιμέρους μοντέλα αντικειμένων (έπιπλα, δένδρα, αυτοκίνητα) όταν προετοιμάζει ένα αρχιτεκτονικό μοντέλο.
3. Για την περιγραφή του μοντέλου απαιτείται μία γλώσσα περιγραφής. Επιπλέον στην πράξη χρησιμοποιείται εξειδικευμένο λογισμικό ώστε να διευκολύνεται και να γίνεται πιο διασθητική η κατασκευή του μοντέλου. Το αποτέλεσμα αποθηκεύεται συνήθως υπό τη μορφή ψηφιακού αρχείου. Τα αρχεία τύπου .html αποτελούν παράδειγμα αποθηκευμένων μοντέλων στοιχειοθετημένου κειμένου με γλώσσα περιγραφής την HTML. Αντίστοιχα τα αρχεία των προγραμμάτων CAD αποτελούν παράδειγμα αποθηκευμένων τρισδιάστατων μοντέλων.

### **1.3.2 Εφαρμογή Γραφικών**

Έχοντας δεδομένο το μοντέλο η εφαρμογή γραφικών αναλαμβάνει:

1. Να προσδιορίσει τις τιμές των ελεύθερων παραμέτρων του μοντέλου. Για παράδειγμα, τη μεγέθυνση υπό την οποία φαίνονται οι χαρακτήρες σε ένα κείμενο, τη γωνία θέασης ενός τρισδιάστατου μοντέλου/μακέτας, τη σχετική θέση των αντικειμένων σε εφαρμογές videogames κ.λπ. Ο προσδιορισμός των παραμέτρων, ανάλογα με την εφαρμογή μπορεί να γίνει από το δημιουργό ή/και από τον τελικό χρήστη του συστήματος γραφικών.
2. Να αντικαταστήσει τις αναφορές σε έτοιμα δομικά στοιχεία με την πλήρη περιγραφή τους λαμβάνοντας μάλιστα υπόψη τις τρέχουσες τιμές των παραμέτρων του συνολικού μοντέλου (π.χ., γωνία θέασης).
3. Να δημιουργήσει, όπου χρειάζεται, τη διδιάστατη περιγραφή του μοντέλου *όχι* όμως και τη διδιάστατη απεικόνισή του. Για παράδειγμα ένα ευθύγραμμο τμήμα του τρισδιάστατου χώρου που περιγράφεται στο μοντέλο μέσω των συντεταγμένων των άκρων του προβάλλεται σε ένα ευθύγραμμο τμήμα του διδιάστατου επιπέδου παρατήρησης και προσδιορίζονται και πάλι οι διδιάστατες συντεταγμένες των άκρων. Δεν καθορίζονται όμως ποιά pixels της οθόνης θα χρωματιστούν για να αναπαραστήσουν το προβεβλημένο ευθύγραμμο τμήμα.



### **1.3.3 Υποσύστημα Δημιουργίας Γραφικών (Graphics Generation)**

Το Υποσύστημα Δημιουργίας Γραφικών παραλαμβάνει την τρέχουσα αναλυτική περιγραφή του μοντέλου, όπως έχει υπολογιστεί από την Εφαρμογή Γραφικών, και τη απεικονίζει σε μία διδιάστατη εικόνα έτοιμη να προβληθεί / αποτυπωθεί στην έξοδο του συστήματος γραφικών. Η εικόνα αυτή αποθηκεύεται προσωρινά σε μία γρήγορη τοπική μνήμη.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το σύνορο μεταξύ των λειτουργιών της Εφαρμογής Γραφικών και του Υποσυστήματος Δημιουργίας Γραφικών δεν είναι αυστηρά καθορισμένο. Επειδή το ΥΔΓ είναι συνήθως υλοποιημένο σε hardware, σημαντική βελτίωση της ταχύτητας του συνολικού συστήματος επιτυγχάνεται όταν το ΥΔΓ είναι σε θέση να δέχεται περιγραφές υψηλού επιπέδου. Για παράδειγμα, αν αντί για την Εφαρμογή Γραφικών αναλαμβάνει το ΥΔΓ την προβολή των τρισδιάστατων σχημάτων στο διδιάστατο επίπεδο παρατήρησης η ταχύτητα του συνολικού συστήματος αυξάνεται σημαντικά.

### **1.3.4 Απεικόνιση Γραφικών - Display**

Η βαθμίδα Απεικόνισης Γραφικών αποτελεί την τελική έξοδο του Συστήματος Γραφικών. Πρόκειται συνήθως για μία συσκευή (οθόνη, προβολέας, εκτυπωτής) που παραλαμβάνει τη διδιάστατη εικόνα που δημιούργησε το ΥΔΓ και την προβάλλει στο κατάλληλο μέσο (επιφάνεια οθόνης, πέτασμα, χαρτί, film).

## Κεφάλαιο 2

# Υποσύστημα Απεικόνισης Γραφικών (Display)

### 2.1 Οι χρησιμοποιούμενες Συσκευές

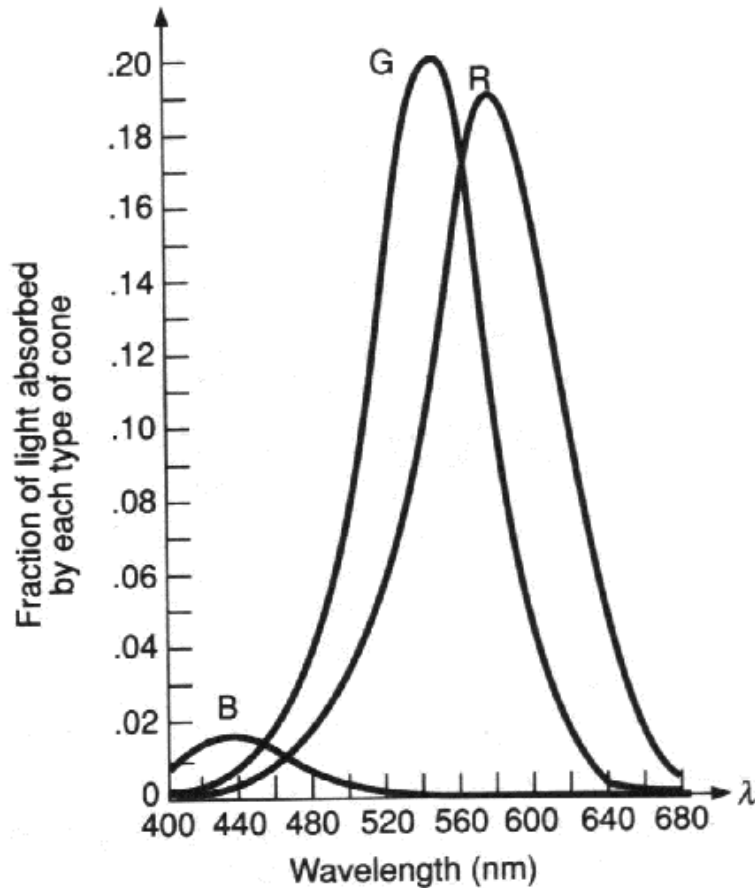
(Η ΕΝΟΤΗΤΑ ΑΥΤΗ ΔΕΝ ΘΑ ΠΕΡΙΛΗΦΘΕΙ ΣΤΙΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2003.)

### 2.2 Αναπαράσταση του Χρώματος

Το Υποσύστημα Απεικόνισης Γραφικών επιτυγχάνει να δώσει στους χρήστες την αίσθηση του χρώματος κάθε σημείου της απεικονιζόμενης σκηνής μέσω της εκπομπής ενός μείγματος σχεδόν μονοχρωματικών *βασικών χρωμάτων*. Χάρη σε μια *ατέλεια* του ανθρώπινου αισθητηρίου της όρασης, το μείγμα αυτό μπορεί να δώσει υποκειμενικό αίσθημα ίδιο με το αίσθημα μιας επιθυμητής χρωματικής απόχρωσης. Τα βασικά χρώματα που χρησιμοποιούνται στα Υποσυστήματα Απεικόνισης είναι συνήθως τρία και έχουν μήκη κύματος που βρίσκονται στις περιοχές του Κόκκινου (R), του Πράσινου (G) και του Μπλε (B).

#### 2.2.1 Ο μηχανισμός προσέγγισης του Χρώματος από μείγμα βασικών χρωμάτων

Η χρωματική πληροφορία μίας σημειακής φωτεινής πηγής αναπαρίσταται μέσω ενός διανύσματος τριών χρωματικών συνιστωσών. Η αναπαράσταση αυτή γίνεται εφικτή χάρη στη φυσιολογία του ανθρώπινου αισθητηρίου της όρασης. Η αίσθηση του χρώματος προκύπτει από το συνδυασμό του ερεθίσματος που δέχονται τρεις διαφορετικοί τύποι *κονίων* (κύτταρα διάσπαρτα στον αμφιβληστροειδή του ματιού). Κάθε τύπος κωνίου έχει διαφορετική συχνοτική απόκριση όταν διεγείρεται από το ορατό φως (Με μήκη κύματος  $\lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$  όπου  $\lambda_{min} \approx 360nm$  και  $\lambda_{max} \approx 830nm$ ). Αν μία φωτεινή πηγή έχει φασματικό περιεχόμενο  $f(\lambda)$  τότε το ερέθισμα που φτάνει στον εγκέφαλο



Σχήμα 2.1: Αποκρίσεις συχνότητας ( $s_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) στην περιοχή του ορατού φάσματος. Οι συναρτήσεις απόκρισης μεγιστοποιούνται κατά σειρά στις περιοχές του κόκκινου (R), πράσινου (G) και μπλε (B).

ισοδυναμεί με το διάνυσμα,

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } c_i = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} s_i(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

Οι συναρτήσεις  $s_i(\lambda)$  μεγιστοποιούνται στις περιοχές του κόκκινου (R), πράσινου (G) και μπλε (B) όπως φαίνεται από τις αντίστοιχες καμπύλες του Σχήματος 2.1.

Αν δύο πηγές με διαφορετικά φασματικά περιεχόμενα  $f_1(\lambda)$  και  $f_2(\lambda)$  αντίστοιχα τυχαίνει να παράγουν το ίδιο διάνυσμα  $\mathbf{c}$  τότε εμφανίζονται να έχουν το ίδιο χρώμα. Το διάνυσμα  $\mathbf{c}$  ονομάζεται *προσλαμβανόμενο χρώμα*.

Για απλούστευση τα ολοκληρώματα στη Σχέση (2.1) θα αντικατασταθούν στη συνέχεια από

αθροίσματα της μορφής,

$$c_i \approx \sum_{k=1 \dots N} s_i(\lambda_k) f(\lambda_k)$$

οπότε η Σχέση (2.1) μπορεί να γραφεί

$$\mathbf{c} = \mathbf{S}^T \mathbf{f} \quad (2.2)$$

όπου

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1(\lambda_1) & s_2(\lambda_1) & s_3(\lambda_1) \\ s_1(\lambda_2) & s_2(\lambda_2) & s_3(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_1(\lambda_N) & s_2(\lambda_N) & s_3(\lambda_N) \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ \vdots \\ f(\lambda_N) \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχος με τη λειτουργία του ματιού είναι ο μηχανισμός καταγραφής μίας έγχρωμης CCD κάμερας. Όταν η ίδια φωτεινή πηγή καταγράφεται από την κάμερα παράγεται ένα αντίστοιχο διάνυσμα μετρήσεων

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } a_i = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} m_i(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

όπου  $m_i(\lambda)$  είναι οι αποκρίσεις συχνότητας (φίλτρα) τριών φωτοευαίσθητων αισθητήρων που αντιστοιχούν σε κάθε θέση (pixel) του CCD. Το διάνυσμα  $\mathbf{a}$  ονομάζεται *καταγραφόμενο χρώμα*. Τα τρία φίλτρα που χρησιμοποιούνται έχουν χρωματική επιλεκτικότητα και παρουσιάζουν, συνήθως, μέγιστο στις περιοχές του κόκκινου (R), πράσινου (G) και μπλε (B) κατά μίμηση των συναρτήσεων  $s_i(\lambda)$  του ανθρώπινου ματιού. Από τη φύση του λοιπόν το καταγραφόμενο χρώμα είναι ένα διάνυσμα *RGB*.

Διακριτοποιώντας τη Σχέση (2.3) όπως και προηγουμένως έχουμε:

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^T \mathbf{f} \quad (2.4)$$

όπου ο πίνακας  $\mathbf{M}$  ορίζεται αντίστοιχα προς τον  $\mathbf{S}$ . Το ζητούμενο είναι πώς με βάση το διάνυσμα  $\mathbf{a}$  μπορεί να αναπαραχθεί φωτεινή ακτινοβολία που να δίνει το ίδιο υποκειμενικό αποτέλεσμα με

το φως της αρχικής πηγής, δηλαδή  $\mathbf{c}$ . Η εν λόγω αναπαραγωγή κατά περίπτωση θα γίνει από την οθόνη μιας τηλεόρασης, το μόνιτορ ενός υπολογιστή, την έγχρωμη εκτύπωση σε λευκό χαρτί, κ.λπ. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την απλή, αλλά διαφωτιστική, εκδοχή ενός τριχρωματικού προβολέα (προθεστωρ).

Το φως που παράγεται (για ένα σημείο του πετάσματος) από τον προβολέα είναι η σύνθεση των τριών φωτεινών δεσμών του προβολέα με φάσμα  $p_i(f)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Το φάσμα της κάθε δέσμης είναι συγκεντρωμένο σε διαφορετικές περιοχές φωτεινών συχνοτήτων κατ' αναλογία με τις συναρτήσεις  $s_i(f)$  του ματιού. Ο προβολέας ρυθμίζει το κέρδος κάθε δέσμης με βάση τις συνιστώσες του διανύσματος  $\mathbf{a}$  που έχει παραχθεί από την κάμερα. Συγκεκριμένα, το παραγόμενο φως έχει φάσμα :

$$g(f) = a_1^c p_1(f) + a_2^c p_2(f) + a_3^c p_3(f) \quad (2.5)$$

όπου

$$\mathbf{a}^c \equiv \begin{bmatrix} a_1^c \\ a_2^c \\ a_3^c \end{bmatrix} = \mathbf{T}^c \mathbf{a}, \quad (2.6)$$

όπου ο  $3 \times 3$  πίνακας  $\mathbf{T}^c$  επιτρέπει τη λεγόμενη *διόρθωση χρώματος* του προβολέα (θα δούμε στη συνέχεια το ρόλο του πίνακα αυτού). Αν διακριτοποιήσουμε τη συχνότητα  $f$  όπως και προηγουμένως η παραπάνω σχέση γράφεται,

$$\mathbf{g} = a_1^c \mathbf{p}_1 + a_2^c \mathbf{p}_2 + a_3^c \mathbf{p}_3 \quad (2.7)$$

$$= [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3] \mathbf{a}^c \quad (2.8)$$

$$= [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3] \mathbf{T}^c \mathbf{a} \quad (2.9)$$

$$= \mathbf{P} \mathbf{a} \quad (2.10)$$

όπου ο  $N \times 3$  πίνακας  $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3] \mathbf{T}^c$  εξαρτάται από το φασματικό περιεχόμενο των τριών δεσμών του προβολέα και τον πίνακα διόρθωσης χρώματος.

Όταν το ανθρώπινο μάτι δεχθεί το φωτεινό ερέθισμα από το συγκεκριμένο σημείο του πετάσματος, σύμφωνα με τη Σχέση (2.2) θα αντιληφθεί το προσλαμβανόμενο χρώμα

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{S}^T \mathbf{g} = \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{a} = \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{M}^T \mathbf{f} \quad (2.11)$$

όπου διαδοχικά χρησιμοποιήσαμε τις Σχέσεις (2.7) και (2.4). Για να έχει το προβαλλόμενο σημείο το ίδιο προσλαμβανόμενο χρώμα με αυτό της αρχικής πηγής θα πρέπει  $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$  δηλαδή

$$\mathbf{S}^T \mathbf{f} = \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{M}^T \mathbf{f} \quad (2.12)$$

Μάλιστα η Σχέση (2.12) πρέπει να ισχύει ανεξαρτήτως του χρώματος της αρχικής πηγής  $\mathbf{f}$ . Συνεπώς για να εξασφαλιστεί ότι η διαδικασία καταγραφής-αναπαραγωγής δεν αλλοιώνει το χρωματικό

περιεχόμενο θα πρέπει:

$$\mathbf{S}^T = \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{M}^T \quad (2.13)$$

όπου ο πίνακας  $\mathbf{S}$  εξαρτάται από την ευαισθησία του ανθρώπινου ματιού στις συχνότητες του ορατού φωτεινού φάσματος, ο πίνακας  $\mathbf{M}$  εξαρτάται αποκλειστικά από την αντίστοιχη ευαισθησία της κάμερας και ο πίνακας  $\mathbf{P}$  καθορίζεται από το φασματικό περιεχόμενο των τριών δεσμών του προβολέα. Η ικανοποίηση της Σχέσης (2.13) είναι εφικτή υπό τις ακόλουθες παραδοχές:

- Αν και ο πίνακας  $\mathbf{S}$  διαφοροποιείται από άνθρωπο σε άνθρωπο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας *αντιπροσωπευτικός* πίνακας που περίπου περιγράφει το *μέσο θεατή*.
- Για κάθε συνδυασμό κάμερας / προβολέα κάνουμε μία από τις ακόλουθες δύο ρυθμίσεις:
  1. Για δεδομένο μοντέλο κάμερας (δηλαδή συγκεκριμένο πίνακα  $\mathbf{M}$  επιλέγεται πειραματικά<sup>1</sup> ο κατάλληλος πίνακας  $\mathbf{P}$  του προβολέα έτσι ώστε να ικανοποιείται η Σχέση (2.13). Τούτο είναι εφικτό με κατάλληλη επιλογή του πίνακα διόρθωσης χρώματος  $\mathbf{T}^c$ .
  2. Επιλέγονται κατάλληλα τα τρία φίλτρα  $m_i(\lambda)$  της κάμερας, ισοδύναμα ο πίνακας  $\mathbf{M}$  έτσι ώστε για δεδομένους πίνακες  $\mathbf{S}$  και  $\mathbf{P}$  να ισχύει η Σχέση (2.13). Και εδώ η επιλογή γίνεται με πειραματικό τρόπο.

Συνοψίζοντας, το *προσλαμβανόμενο χρώμα*  $\mathbf{c} = \mathbf{S}^T \mathbf{f}$  ενός φωτεινού σημείου αναπαρίσταται από το *καταγραφόμενο χρώμα*  $\mathbf{a} = \mathbf{M}^T \mathbf{f}$  και από αυτό αναπαράγεται το *προσλαμβανόμενο χρώμα*  $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{a}$  λαμβάνοντας μέρηνα ώστε  $\hat{\mathbf{c}} \approx \mathbf{c}$ .

### 2.2.2 Συστήματα Χρωματικών Συντεταγμένων

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το καταγραφόμενο χρώμα  $\mathbf{a}$  αναπαριστά κατά προσέγγιση τη συμμετοχή του κόκκινου, πράσινου και μπλε μέρους του ορατού φάσματος στη σύνθεση ενός χρώματος. Για το λόγο αυτό το συγκεκριμένο σύστημα χρωματικών συνιστωσών είναι το γνωστό ως *RGB* (Red-Green-Blue).

Άλλα χρωματικά συστήματα όπως τα *YIQ*, *YUV*, *YCrCb*, *CMY* και *CMYK* είναι επίσης πολύ δι-αδεδομένα (το τελευταίο χρησιμοποιεί 4 χρωματικές συνιστώσες). Στα συστήματα αυτά, το χρώμα αναπαρίσταται μέσω μίας τριάδας (ή και τετράδας) χρωματικών συντεταγμένων που έχει αμφιμονοσήμαντη σχέση με το διάνυσμα  $\mathbf{a}$  της αναπαράστασης *RGB*. Ο Πίνακας 2.1 περιέχει τους μετασχηματισμούς του *RGB* διανύσματος  $\mathbf{a}$  στις παραπάνω εναλλακτικές αναπαραστάσεις.

---

<sup>1</sup>Η πειραματική διαδικασία στηρίζεται στην υποκειμενική κρίση αντιπροσωπευτικού αριθμού ανθρώπων που, για ένα πλήθος μονοχρωματικών πηγών, αναλαμβάνουν να συγκρίνουν το φως της κάθε αρχικής πηγής με αυτό που αναπαράγει ο προβολέας.

Πίνακας 2.1: Συνηθέστερα συστήματα χρωματικών συντεταγμένων

Σύστημα	Μετασχηματισμός	Χρήση και Σχόλια
YUV	$\mathbf{a}_{YUV} \equiv [Y, U, V]^T = \mathbf{T}\mathbf{a}$ όπου $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.147 & 0.289 & 0.436 \\ 0.615 & -0.515 & -0.100 \end{bmatrix}$	Χρησιμοποιείται από το ευρωπαϊκό πρότυπο τηλεόρασης PAL. Η συνιστώσα $Y$ του διανύσματος αντιπροσωπεύει τη <i>φωτεινότητα</i>
YIQ	$\mathbf{a}_{YIQ} \equiv [Y, I, Q]^T = \mathbf{T}\mathbf{a}$ όπου $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.596 & -0.274 & -0.322 \\ 0.211 & -0.523 & 0.312 \end{bmatrix}$	Χρησιμοποιείται από το αμερικανικό πρότυπο τηλεόρασης NTSC
YCrCb	$\mathbf{a}_{YCrCb} \equiv [Y, Cr, Cb]^T = \mathbf{T}\mathbf{a}$ όπου $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.5000 & -0.4187 & -0.0813 \\ -0.1687 & -0.3313 & 0.5000 \end{bmatrix}$	Χρησιμοποιείται από τα πρότυπα κωδικοποίησης εικόνων και βίντεο JPEG και MPEG αντίστοιχα
CMY	$\mathbf{a}_{CMY} = [1 \ 1 \ 1]^T - \mathbf{a}$	Το σύστημα (Cyan, Magenta, Yellow) είναι συμπληρωματικό του συστήματος RGB
CMYK	$\mathbf{a}_{CMYK} = [\dot{C}, \dot{M}, \dot{Y}, K]^T$ όπου με αναφορά στις συντεταγμένες του συστήματος CMY, $K = \min(C, M, Y)$ , $\dot{C} = C - K$ , $\dot{M} = M - K$ , $\dot{Y} = Y - K$	Το σύστημα (Cyan, Magenta, Yellow, Black) χρησιμοποιείται σε εφαρμογές έγχρωμης εκτύπωσης σε λευκό χαρτί
HSV και LAB	ορίζονται μέσω μη-γραμμικών μετασχηματισμών του RGB.	Τα HSV και LAB είναι <i>ομοιόμορφα</i> ως προς το ανθρώπινο αισθητήριο. Όταν το μάτι αντιλαμβάνεται πως, μεταξύ δύο χρωμάτων, το ένα πλησιάζει περισσότερο σε ένα χρώμα αναφοράς, η ίδια σχέση ισχύει και για τις Ευκλείδειες αποστάσεις των χρωματικών τους συντεταγμένων.

### 2.2.3 Δεικτοδότηση Χρώματος

Δεικτοδότηση χρώματος, είναι η εφαρμογή διανυσματικού κβαντισμού στο διανυσματικό χώρο των χρωμάτων  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ .

Πειραματικά αποτελέσματα έχουν καταδείξει ότι το ανθρώπινο μάτι μπορεί να διακρίνει μόνο ένα μικρό αριθμό από διαφορετικές χρωματικές αποχρώσεις όταν αυτές συνυπάρχουν σε μία εικόνα. Με βάση αυτή την παρατήρηση η ιδέα του κβαντισμού των χρωμάτων σε μία εικόνα εμφανίστηκε ελκυστική κυρίως για λόγους συμπίεσης του όγκου των αναπαραστάσεων.

Τα σύμβολα του διανυσματικού κβαντιστή που χρησιμοποιείται είναι κατά σύμβαση οι αριθμοί από 1 έως  $N$  όπου  $N$  είναι το πλήθος των κβαντικών σταθμών. Ο αποκβαντισμός γίνεται με εξαιρετικά απλό τρόπο μέσω ενός *χρωματικού πίνακα (color map)*  $\mathbf{A}$  διαστάσεων  $N \times 3$  ο οποίος έχει στην  $i$ -γραμμή του το χρώμα  $\mathbf{a}$  που αντιστοιχεί στην  $i$  κβαντική στάθμη (π.χ. το pixel με δεικτοδοτημένο χρώμα "5" θα έχει πραγματικό χρώμα  $\mathbf{a} = \mathbf{A}(5, 1 : 3)^T$ ).

Τυπικές τιμές του  $N$  είναι  $2^1$ ,  $2^4$ ,  $2^8$  και  $2^{16}$  με πιο συνηθισμένη την  $N = 2^8 = 256$ .



## Κεφάλαιο 3

# Εφαρμογή Γραφικών και Υποσύστημα Δημιουργίας Γραφικών

### 3.1 Χάραξη Γραμμών - Scan Line Conversion

Ο όρος Χάραξη Γραμμών αναφέρεται στην προσέγγιση μίας διδιάστατης γραμμής στο διακριτό πλέγμα σημείων (pixels) της ψηφιακής εικόνας που παράγεται στην έξοδο του συστήματος γραφικών.

Διακρίνονται δύο κατηγορίες αλγορίθμων χάραξης γραμμών: (α) αυτοί που χαράζουν μονοχρωματικές γραμμές (π.χ., μαύρο πάνω σε άσπρο) και (β) αυτοί που για να επιτύχουν καλύτερο οπτικό αποτέλεσμα χρησιμοποιούν και ενδιάμεσες αποχρώσεις (π.χ., αποχρώσεις του γκρι για τη χάραξη μίας μαύρης γραμμής πάνω σε άσπρο φόντο).

#### 3.1.1 Χάραξη ευθύγραμμων τμημάτων

Οι αλγόριθμοι χάραξης που εξετάζουμε αφορούν τη χάραξη ευθύγραμμων τμημάτων με άκρα πάνω στο διακριτό πλέγμα των pixels. Συγκεκριμένα, το ζητούμενο είναι η χάραξη του ευθύγραμμου τμήματος μεταξύ των σημείων  $(x_0, y_0)$  και  $(x_1, y_1)$  όπου  $x_0 < x_1$  και  $x_0, y_0, x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ .

Η εν λόγω ευθεία περιγράφεται από την εξίσωση  $y = mx + b$  με  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \in \mathbb{R}$ , όπου  $\Delta y = y_1 - y_0$ ,  $\Delta x = x_1 - x_0$  και  $b = y_0 - mx_0$ .

#### Αλγόριθμος 1:

$$Dx = x1 - x0;$$

$$Dy = y1 - y0;$$

$$m = Dy / Dx;$$

$$b = y0 - m * x0;$$

```
for x=x0:1:x1
```

```

y=mx+b;
yp = floor(0.5+y);
drawpixel(x,yp);
end

```

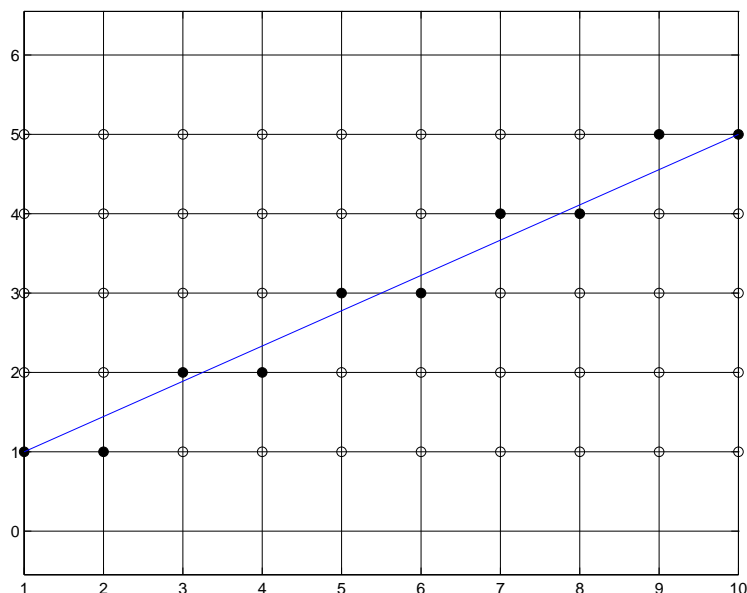
Τα Σχήματα 3.1 και 3.2 δείχνουν το αποτέλεσμα του αλγορίθμου για  $0 < m < 1$  και  $m > 1$  αντίστοιχα. Στην πρώτη περίπτωση ( $0 < m < 1$ ) η διακριτή προσέγγιση του ευθύγραμμου τμήματος είναι αρκετά ικανοποιητική χάρη στο γεγονός ότι για κάθε  $x \in [x_0 \cdots x_1]$  υπάρχει ένα δείγμα που ανήκει στην προσέγγιση αλλά ταυτόχρονα και για κάθε  $y \in [y_0 \cdots y_1]$  υπάρχει ένα τουλάχιστο δείγμα που επίσης ανήκει στην προσέγγιση. Δίνεται έτσι η αίσθηση της συνεχόμενης γραμμής. Αντίθετα, στην περίπτωση που  $m > 1$  η δεύτερη συνθήκη δεν ικανοποιείται με αποτέλεσμα η προσέγγιση να δίνει την αίσθηση διακεκομμένου ευθύγραμμου τμήματος. Αυτή η αδυναμία του αλγορίθμου μπορεί να ξεπεραστεί αν στην περίπτωση που  $m > 1$  χρησιμοποιηθεί το  $y$  σαν ανεξάρτητη μεταβλητή:

```

Dx    = x1-x0;
Dy    = y1-y0;
m     = Dy/Dx;
b     = y0-m*x0;
invm  = 1/m;
inymb = b*invm;
if (m<=1)
    for x=x0:1:x1
        y=m*x+b
        yp = floor(0.5+y)
        drawpixel(x,yp)
    end
else
    for y=y0:1:y1
        x=invm*y-inymb;
        xp = floor(0.5+x)
        drawpixel(xp,y)
    end
end
end

```

Με την παραπάνω τροποποίηση του αρχικού αλγορίθμου καλύπτονται ικανοποιητικά οι περιπτώσεις όπου  $m \geq 0$  που αντιστοιχεί στη συνθήκη  $y_1 \geq y_0$ . Για  $m < 0$  ο ίδιος αλγόριθμος μπορεί



Σχήμα 3.1: Αλγόριθμος 1,  $0 < m < 1$

να χρησιμοποιηθεί με κατάλληλες αλλαγές στα πρόσημα των  $m$  και  $y$ .

Η πολυπλοκότητα του Αλγορίθμου 1:

Κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου απαιτούνται

$$N = \max(Dx, Dy) = \begin{cases} Dx & 0 \leq m \leq 1 \\ Dy & m > 1 \end{cases}$$

επαναλήψεις υπολογισμού της δεσμευμένης συντεταγμένης ( $yp$  ή  $xp$ ) αντίστοιχα με συνολικό υπολογιστικό κόστος:  $N$  πραγματικούς πολλαπλασιασμούς,  $N$  πραγματικές προσθέσεις και  $N$  στρογγυλοποιήσεις.

### Αλγόριθμος 2: Digital Differential Analyzer - DDA

Ο παρακάτω αλγόριθμος δίνει το ίδιο αποτέλεσμα μειώνοντας το υπολογιστικό κόστος. Χωρίς βλάβη της γενικότητας παρουσιάζεται μόνο η εκδοχή του για  $0 \leq m \leq 1$ . Ο αλγόριθμος στηρίζεται στην παρατήρηση ότι στην  $i + 1$ -επανάληψη ισχύει ότι:

$$x_{i+1} = x_i + 1$$

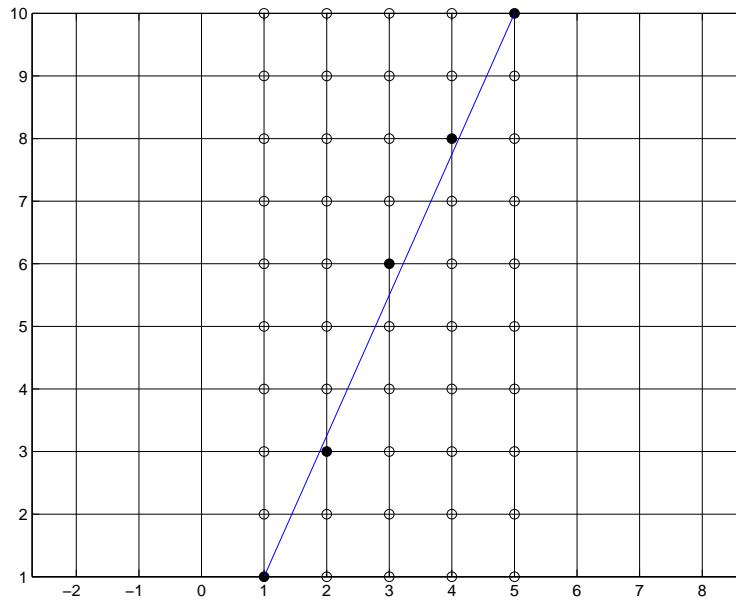
$$y_{i+1} = mx_{i+1} + b = m(x_i + 1) + b = y_i + m$$

Συνοψώς είναι δυνατός ο αναδρομικός υπολογισμός της τεταγμένης  $y$  ως ακολούθως:

$$Dx = x_1 - x_0;$$

$$Dy = y_1 - y_0;$$

$$m = Dy/Dx;$$



Σχήμα 3.2: Αλγόριθμος 1,  $m > 1$

```

b = y0-m*x0;

x=x0;
y=y0;
yp = floor(0.5+y)
drawpixel(x,yp)
for i=x0+1:1:x1
    x=i;
    y=y+m;
    yp = floor(0.5+y)
    drawpixel(x,yp)
end

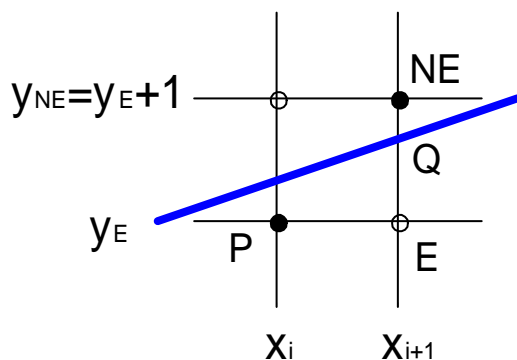
```

Αποτέλεσμα του αναδρομικού υπολογισμού είναι η μείωση της πολυπλοκότητας σε:  $N$  πραγματικές προσθέσεις και  $N$  στρογγυλοποιήσεις. Είναι σημαντικό το ότι δεν απαιτείται κανένας πολλαπλασιασμός.

Δυστυχώς, το αντίτιμο στην παραπάνω υλοποίηση είναι η συσσώρευση σφάλματος στρογγυλοποίησης λόγω της αναγκαστικά πεπερασμένης ακρίβειας στην αναπαράσταση του πραγματικού αριθμού  $m$ .

### **Αλγόριθμος 3: Ο αλγόριθμος του Bresenham (1965)**

Με αναφορά στο Σχήμα 3.3 ο αλγόριθμος του Bresenham παρακολουθεί και ενημερώνει



Σχήμα 3.3: Αλγόριθμος του Bresenham

αναδρομικά την απόσταση του σημείου  $Q$  που αντιστοιχεί στην ιδανική τεταγμένη του ευθύγραμμου τμήματος στη θέση  $x_{i+1} = x_0 + i$  από τις δύο δυνατές προσεγγίσεις  $E$  και  $NE$ . Σε κάθε βήμα του αλγορίθμου επιλέγεται ένα από τα δύο υποψήφια σημεία ανάλογα με το ποιο βρίσκεται πλησιέστερα προς την ιδανικό σημείο  $Q$ . Η σχετική απόφαση λαμβάνεται παρακολουθώντας το πρόσημο της διαφοράς  $d_i \triangleq \delta(Q, NE) - \delta(Q, E)$  όπου,

$$\delta(Q, NE) = y_{NE} - y_Q = (y_i + 1) - (m(x_i + 1) + b)$$

$$\delta(Q, E) = y_Q - y_E = (m(x_i + 1) + b) - y_i$$

οπότε,

$$d_i = \delta(Q, NE) - \delta(Q, E) = 2y_i - 2mx_i - 2m - 2b + 1.$$

Αν  $d_i \geq 0$  επιλέγεται ως επόμενο σημείο το  $E$ , δηλαδή,  $y_{i+1} = y_i$ . Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ότι στην επόμενη επανάληψη η μεταβλητή ελέγχου θα πάρει την τιμή:

$$d_{i+1} = 2y_i - 2m(x_i + 1) - 2m - 2b + 1 = d_i - 2m.$$

Αντίστοιχα αν  $d_i < 0$  επιλέγεται ως επόμενο σημείο το  $NE$ , δηλαδή,  $y_{i+1} = y_i + 1$ . Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ότι στην επόμενη επανάληψη η μεταβλητή ελέγχου θα πάρει την τιμή:

$$d_{i+1} = 2(y_i + 1) - 2m(x_i + 1) - 2m - 2b + 1 = d_i - 2m + 2.$$

Στις δύο παραπάνω αναδρομές ο όρος  $2m$  είναι ρητός αριθμός ( $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ ). Χωρίς αλλοίωση της συνθήκης ελέγχου, είναι εφικτή η μείωση του υπολογιστικού κόστους με την υιοθέτηση της μεταβλητής  $f_i \triangleq (x_1 - x_0)d_i$  οπότε η αναδρομή περιέχει μόνο *ακέραιες* προσθαφαιρέσεις:

$$f_{i+1} = \begin{cases} f_i - \Delta_y & f_i \geq 0 \\ f_i - \Delta_y + \Delta_x & f_i < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

όπου  $\Delta_x \triangleq 2(x_1 - x_0)$  και  $\Delta_y \triangleq 2(y_1 - y_0)$ .

Με βάση τα παραπάνω ο αλγόριθμος του Bresenham για  $0 \leq m \leq 1$  έχει ως ακολούθως:

```

DeltaX = 2*(x1-x0);
DeltaY = 2*(y1-y0);
x = x0;
y = y0;
f = -DeltaY + DeltaX/2;
drawpixel(x,y)
for i=x0+1:1:x1
    x=i;
    if f<0
        y=y+1;
        f=f + DeltaX;
    end
    f = f - DeltaY;
    drawpixel(x,y)
end

```

Η αρχικοποίηση  $f = -\text{DeltaY} + \text{DeltaX}/2$ ; προκύπτει αν θέσουμε στην (3.1)  $x_i = x_0$ ,  $y_i = y_0$  και λάβουμε υπόψη ότι  $y_0 = mx_0 + b$ .

Το αναμενόμενο υπολογιστικό κόστος είναι  $N$  ακέραιες προσθαφαιρέσεις ενώ δεν υπάρχει το πρόβλημα της συσσώρευσης σφάλματος (που είχε ο Αλγόριθμος 2). Με κατάλληλες μετατροπές ο αλγόριθμος του Bresenham καλύπτει και τις περιπτώσεις που το  $m$  βρίσκεται εκτός του διαστήματος  $(0, 1)$ .

### 3.1.2 Χάραξη κύκλων

Στην ενότητα αυτή εξετάζεται η χάραξη κύκλων με ακέραια ακτίνα,  $r \in \mathbb{Z}$ , και κέντρο στο σημείο  $(0, 0)$ . Με ευκολία -μια απλή μετατόπιση τών προς χάραξη σημείων - οι αλγόριθμοι επεκτείνονται σε κύκλους με αυθαίρετο κέντρο  $(x_c, y_c) \in \mathbb{Z}^2$ . Είναι ωστόσο αρκετά διαφορετική η αντιμετώπιση της χάραξης όταν είτε οι συντεταγμένες του κέντρου είτε η ακτίνα είναι μη ακέραιες ποσότητες.

Κάθε σημείο  $(x, y)$  του παραπάνω κύκλου ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (3.2)$$

ή σε πολική μορφή

$$\begin{aligned} x(\vartheta) &= r \cos(\vartheta) \\ y(\vartheta) &= r \sin(\vartheta), \vartheta \in [0, 2\pi). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Σε αντίθεση με την εξίσωση της ευθείας, οι εξισώσεις (3.2) και (3.3) δεν ορίζουν μία (μονοσήμαντη) συνάρτηση από το  $x$  στο  $y$ . Τούτο εμποδίζει την άμεση χρήση αλγορίθμων παρόμοιων με τους Αλγόριθμους 1-3 της προηγούμενης ενότητας. Ωστόσο, η δυσκολία αυτή μπορεί να ξεπεραστεί αν αντί για ολόκληρο τον κύκλο επιχειρηθεί η χάραξη ενός επιμέρους τόξου του. Ευτυχώς ο εντοπισμός των διακριτών σημείων που προσεγγίζουν ένα κατάλληλο τόξο -ίσο προς ένα όγδοο του κύκλου- ορίζει αυτόματα τις θέσεις των υπολοίπων σημείων του κύκλου χάρη στις ακόλουθες συμμετρίες: Αν  $x, y$  ανήκει στον κύκλο τότε και τα σημεία  $(x, -y)$ ,  $(-x, y)$ ,  $(-x, -y)$ ,  $(y, x)$ ,  $(y, -x)$ ,  $(-y, x)$ ,  $(-y, -x)$  ανήκουν επίσης στον ίδιο κύκλο.

Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση εξετάζονται στη συνέχεια αλγόριθμοι χάραξη του τόξου που αντιστοιχεί στο διάστημα  $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$  σύμφωνα με την παραμετροποίηση της εξίσωσης (3.3). Στο διάστημα αυτό η λύση

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (3.4)$$

της εξίσωσης ορισμού (3.2) είναι μία μονότονα φθίνουσα συνάρτηση του  $y$  ως προς  $x$ .

### Αλγόριθμος 1:

Η μετατροπή του Αλγορίθμου 1 της Ενότητας 3.1.1 είναι εύκολη:

```
rsqr = r^2;
rcos45 = floor(r*cos(pi/4))+1;
for x=0:1:rcos45
    y=sqrt(rsqr - x^2);
    yp = floor(0.5+y);
    drawpixel(x,yp)
end
```

Ωστόσο η υπολογιστική πολυπλοκότητα είναι ιδιαίτερα μεγάλη εξαιτίας των  $O(r \times \cos(\pi/4))$  επαναλήψεων του υπολογισμού της τετραγωνικής ρίζας και των ισάριθμων υψώσεων του  $x$  στο τετράγωνο.

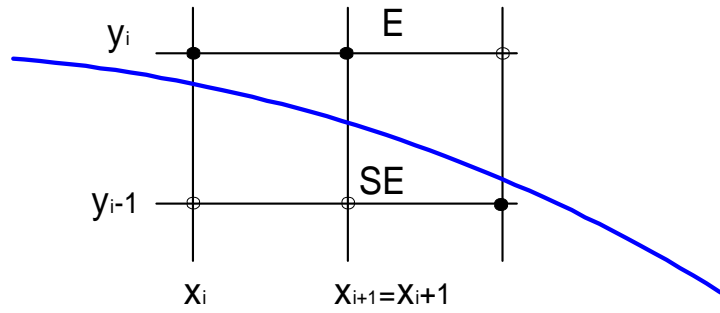
### Αλγόριθμος 2:

Δυστυχώς, η άμεση μετατροπή του Αλγορίθμου 2 της Ενότητας 3.1.1 δεν είναι εφικτή καθώς στην περίπτωση του κύκλου η μεταβολή της τιμής του  $y$  μεταξύ δύο διαδοχικών θέσεων  $x$  και  $x+1$  δεν είναι σταθερή (η (3.4) είναι μή γραμμική).

### Αλγόριθμος 3: Αλγόριθμος του Bresenham για κύκλους

Ο ταχύς αλγόριθμος του Bresenham επιδέχεται μετατροπής ώστε να χρησιμοποιηθεί στη χάραξη κύκλων.

Με αναφορά στο Σχήμα 3.4 ο αλγόριθμος του Bresenham παρακολουθεί και ενημερώνει αναδρομικά την *ακτινική απόσταση* του σημείου  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  που επιλέγεται προς ένταξη στη δι-



Σχήμα 3.4: Αλγόριθμος του Bresenham

ακριτή προσέγγιση του κύκλου από την καμπύλη του ιδανικού κυκλικού τόξου. Σε κάθε βήμα εξετάζονται οι δύο δυνατές προσεγγίσεις:  $E$  με συντεταγμένες  $(x_i + 1, y_i)$  και  $SE$  με συντεταγμένες  $(x_i + 1, y_i - 1)$ . Σημειώνεται ότι αυτές οι δύο εναλλακτικές, η πρώτη εκτός και η δεύτερη εντός του ιδανικού κύκλου, είναι οι μόνες δυνατές αφού η συνάρτηση  $y = y(x)$  είναι μονότονα φθίνουσα στο εξεταζόμενο τόξο του κύκλου.

Σε κάθε βήμα του αλγορίθμου επιλέγεται ένα από τα δύο υποψήφια σημεία ανάλογα με το ποιο βρίσκεται πλησιέστερα προς τον *ιδανικό κύκλο*, δηλαδή έχει απόσταση από το κέντρο  $(0, 0)$  πλησιέστερη προς την ακτίνα  $r$ . Η σχετική απόφαση λαμβάνεται παρακολουθώντας το πρόσημο της διαφοράς  $d_i \triangleq \delta(E) - \delta(SE)$  όπου,

$$\begin{aligned} \delta(SE) &= r^2 - \|(x_i + 1, y_i - 1)\|^2 = r^2 - [(x_i + 1)^2 + (y_i - 1)^2] \\ \delta(E) &= \|(x_i + 1, y_i)\|^2 - r^2 = [(x_i + 1)^2 + y_i^2] - r^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

οπότε,

$$d_i = \delta(E) - \delta(SE) = 2x_i^2 + 2y_i^2 + 4x_i - 2y_i - 2r^2 + 3. \quad (3.6)$$

Αν  $d_i \leq 0$  επιλέγεται ως επόμενο σημείο το  $E$ , δηλαδή,  $y_{i+1} = y_i$ . Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ότι στην επόμενη επανάληψη η μεταβλητή ελέγχου θα πάρει την τιμή:

$$\begin{aligned} d_{i+1} &= 2(x_i + 1)^2 + 2y_i^2 + 4(x_i + 1) - 2y_i - 2r^2 + 3 \\ &= d_i + 4x_i + 6 \\ &= d_i + 4i + 6. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Αντίστοιχα αν  $d_i > 0$  επιλέγεται ως επόμενο σημείο το  $SE$ , δηλαδή,  $y_{i+1} = y_i - 1$ . Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ότι στην επόμενη επανάληψη η μεταβλητή ελέγχου θα πάρει την τιμή:

$$\begin{aligned} d_{i+1} &= 2(x_i + 1)^2 + 2(y_i - 1)^2 + 4(x_i + 1) - 2(y_i - 1) - 2r^2 + 3 \\ &= d_i + 4x_i - 4y_i + 10 \\ &= d_i + 4i - 4y_i + 10. \end{aligned} \quad (3.8)$$



Στις δύο παραπάνω αναδρομές οι όροι ενημέρωσης είναι ακέραιοι οπότε η αναδρομή περιέχει μόνο *ακέραιες* προσθαφαιρέσεις.

### **Χάραξη άλλων καμπυλών**

Τροποποιημένες εκδοχές των αλγορίθμων 1-3 έχουν κατασκευαστεί για άλλα είδη παραμετροποιημένων καμπυλών όπως (α) η έλλειψη, η παραβολή και άλλες κωνικές τομές, (β) πολυωνυμικά περιγραφόμενες καμπύλες.

Η χάραξη αυθαίρετων καμπυλών, που δεν επιδέχονται αναλυτική περιγραφή, ανάγεται στην κατά τμήματα προσέγγισή τους από αναλυτικές καμπύλες ή ευθείες.

## **3.2 Πλήρωση Κλειστών Σχημάτων - Filling**

(Η ΕΝΟΤΗΤΑ ΑΥΤΗ ΔΕΝ ΘΑ ΠΕΡΙΛΗΦΘΕΙ ΣΤΙΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2003.)

## Κεφάλαιο 4

# Διανύσματα και Σημεία

Τόσο τα τρισδιάστατα όσο και τα διδιάστατα σχήματα/αντικείμενα προσδιορίζονται μέσω των θέσεων που καταλαμβάνουν τα σημεία από τα οποία αποτελούνται στον τρισδιάστατο και το διδιάστατο χώρο αντίστοιχα. Αν και οι έννοιες *θέση* και *σημείο* φαίνεται στην κοινή γλώσσα να έχουν μια αρκετά προφανή σημασία, ο μαθηματικός χειρισμός τους απαιτεί μία αυστηρή θεμελίωση που εξασφαλίζει την εσωτερική συνέπεια της αντίστοιχης θεωρίας και επιτρέπει τον ορισμό πράξεων και τελεστών που αντιστοιχούν στις συνήθεις έννοιες της μετατόπισης, περιστροφής, προβολής κ.λπ.

### 4.1 Διανυσματικοί χώροι

Βασικό μαθηματικό εργαλείο που χρησιμοποιείται για την αυστηρή θεμελίωση της διδιάστατης και τρισδιάστατης γεωμετρίας είναι η θεωρία των *διανυσματικών χώρων*.

Το σύνολο  $\mathcal{V}$  αποτελεί διανυσματικό χώρο και τα στοιχεία του αποκαλούνται διανύσματα όταν (i) μεταξύ των οποιονδήποτε δύο στοιχείων του,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ , ορίζεται η πράξη της πρόσθεσης ( $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ ) και (ii) μεταξύ οποιουδήποτε στοιχείου του και οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού  $a \in \mathbb{R}$  ορίζεται ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ( $a\mathbf{v}$ ) και ισχύουν τα ακόλουθα αξιώματα :

1. Η πρόσθεση είναι κλειστή πράξη :

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V} \Rightarrow \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V} \quad (4.1)$$

2. Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός δίνει αποτέλεσμα που ανήκει στο διανυσματικό χώρο :

$$\mathbf{v} \in \mathcal{V}, a \in \mathbb{R} \Rightarrow a\mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (4.2)$$

3. Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο  $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$  ως προς την πρόσθεση τέτοιο ώστε :

$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (4.3)$$

4. Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο  $1 \in \mathbb{R}$  ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό τέτοιο ώστε:

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (4.4)$$

5. Η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική:

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1, \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V} \quad (4.5)$$

6. Η πρόσθεση είναι προσεταιριστική:

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3), \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathcal{V} \quad (4.6)$$

7. Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός:

$$(a_1 a_2)\mathbf{v} = a_1(a_2\mathbf{v}), \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (4.7)$$

8. Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός επιμερίζεται τη διανυσματική πρόσθεση:

$$a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = a\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2, \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}, a \in \mathbb{R} \quad (4.8)$$

9. Η πρόσθεση μεταξύ βαθμωτών (πραγματικών) αριθμών επιμερίζεται από το βαθμωτό πολλαπλασιασμό:

$$(a_1 + a_2)\mathbf{v} = a_1\mathbf{v} + a_2\mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \quad (4.9)$$

Για ευκολία αντί του γινομένου  $(-1)\mathbf{v}$  χρησιμοποιείται το σύμβολο  $-\mathbf{v}$  και ισχύει ότι  $(-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = (-1 + 1)\mathbf{v} = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ . Ως απόρροια των παραπάνω αξιωμάτων ισχύουν οι ιδιότητες:

1.  $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{w}$ .

2.  $a\mathbf{v} = a\mathbf{u}, a \neq 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{u}$ .

3.  $a\mathbf{v} = \beta\mathbf{v}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \Rightarrow a = \beta$ .

4.  $(a - \beta)\mathbf{v} = a\mathbf{v} - \beta\mathbf{v}$ .

5.  $a(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = a\mathbf{v} - a\mathbf{u}$ .

6.  $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$ .

Στις παραπάνω εκφράσεις τα  $a, \beta$  συμβολίζουν πραγματικούς αριθμούς και τα  $\mathbf{v}, \mathbf{u}$  διανύσματα.

### 4.1.1 Βάσεις και διάσταση διανυσματικού χώρου

Τα διανύσματα  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n, n \in \mathbb{Z}^+$  αποτελούν μία βάση του διανυσματικού χώρου  $\mathcal{V}$  αν κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός τους, δηλαδή  $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \exists c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  τέτοια ώστε

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{b}_i. \quad (4.10)$$

Το διάνυσμα  $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n] \in \mathbb{R}^n$  ονομάζεται *διάνυσμα συντεταγμένων* (ή απλώς *συντεταγμένες*) του  $\mathbf{v}$  ως προς τη βάση  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1 \dots n}$ .

Αν επιπλέον τα διανύσματα της βάσης  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1 \dots n}$  είναι μεταξύ τους γραμμικώς ανεξάρτητα, δηλαδή,

$$\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0} \Rightarrow a_i = 0, i = 1 \dots n \quad (4.11)$$

για οποιαδήποτε  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , τότε η βάση  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1 \dots n}$  ονομάζεται γραμμικώς ανεξάρτητη βάση και το πλήθος,  $n$ , των στοιχείων της αποκαλείται *διάσταση του διανυσματικού χώρου  $\mathcal{V}$* . Ένας διανυσματικός χώρος μπορεί να έχει πολλές διαφορετικές (γραμμικώς ανεξάρτητες) βάσεις αλλά η διάστασή του είναι ένας συγκεκριμένος μοναδικός αριθμός.

### 4.1.2 Συστήματα συντεταγμένων διανυσματικού χώρου

Μία οποιαδήποτε γραμμικώς ανεξάρτητη βάση του διανυσματικού χώρου  $\mathcal{V}$  ονομάζεται σύστημα συντεταγμένων του διανυσματικού αυτού χώρου.

Για ένα δεδομένο σύστημα συντεταγμένων (βάση)  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1 \dots n}$  ενός διανυσματικού χώρου,  $\mathcal{V}$ , ορίζεται ένας *ισομορφισμός* του  $\mathcal{V}$  με το σύνολο  $\mathbb{R}^n$  εάν:

1. Αντιστοιχηθεί κάθε διάνυσμα  $\mathbf{v}$  του  $\mathcal{V}$  στο διάνυσμα  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  των συντεταγμένων του ως προς τη συγκεκριμένη βάση.
2. Αντιστοιχηθεί η διανυσματική πρόσθεση  $+$  του  $\mathcal{V}$  με την κοινή πρόσθεση πραγματικών διανυσμάτων μήκους  $n$  του  $\mathbb{R}^n$ .
3. Αντιστοιχηθεί ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός μεταξύ στοιχείων του  $\mathbb{R}$  και του  $\mathcal{V}$  με τον κοινό βαθμωτό πολλαπλασιασμό μεταξύ στοιχείων του  $\mathbb{R}$  και πραγματικών διανυσμάτων μήκους  $n$  του  $\mathbb{R}^n$ .

Ως αποτέλεσμα του ισομορφισμού η διανυσματική πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός είναι δυνατό να διεκπεραιώνονται στο σύνολο  $\mathbb{R}^n$  των συντεταγμένων και στη συνέχεια το αποτέλεσμα να ανάγεται στο διανυσματικό χώρο  $\mathcal{V}$  μέσω της σχέσης (4.10).

### 4.1.3 Διανυσματικοί Μετασχηματισμοί, Γραμμικοί Μετασχηματισμοί, Μετασχηματισμοί Affine

Οι συναρτήσεις της μορφής  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  που απεικονίζουν ένα οποιοδήποτε διάνυσμα  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  στο διάνυσμα  $f(\mathbf{v}) \in \mathcal{V}$  ονομάζονται *διανυσματικοί μετασχηματισμοί*.

Αν επιπλέον, για το διανυσματικό μετασχηματισμό  $\mathcal{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  ισχύει ότι:

$$\mathcal{L}(a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2) = a_1 \mathcal{L}(\mathbf{v}_1) + a_2 \mathcal{L}(\mathbf{v}_2), \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}, \quad (4.12)$$

τότε ο μετασχηματισμός  $\mathcal{L}$  ονομάζεται *γραμμικός*.

Επίσης, αν για το διανυσματικό μετασχηματισμό  $\tilde{\mathcal{L}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  ισχύει ότι:

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}) + \mathbf{v}_c \quad (4.13)$$

όπου το διάνυσμα  $\mathbf{v}_c$  είναι σταθερό (ανεξάρτητο του  $\mathbf{v}$ ) και ο μετασχηματισμός  $\mathcal{L}$  είναι γραμμικός, τότε ο  $\tilde{\mathcal{L}}$  λέγεται διανυσματικός μετασχηματισμός *affine*.

Απόρροια της εξ. (4.12) είναι η εξής πολύ βασική πρόταση:

**Πρόταση 4.1.** Έστω γραμμικώς ανεξάρτητη βάση  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1 \dots n}$  του  $n$ -διάστατου διανυσματικού χώρου  $\mathcal{V}$  και  $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n]^T \in \mathbb{R}^n$  οι συντεταγμένες του τυχαίου διανύσματος  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ . Κάθε γραμμικός διανυσματικός μετασχηματισμός  $\mathcal{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό των συντεταγμένων  $\mathbf{c}$  του  $\mathbf{v}$  από τα αριστερά με τον  $n \times n$  πίνακα

$$\mathbf{L} \triangleq \begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

όπου  $l_{ki}, k = 1, \dots, n$  οι συντεταγμένες του μετασχηματισμού,  $\mathcal{L}(\mathbf{b}_i)$  του διανύσματος βάσης  $\mathbf{b}_i$ , δηλαδή,

$$\mathbf{c}^L = \mathbf{Lc} \quad (4.14)$$

Απόδειξη:

Η εικόνα,  $\mathcal{L}(\mathbf{v})$  του  $\mathbf{v}$  ως προς το γραμμικό μετασχηματισμό  $\mathcal{L}$  αναπτύσσεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{v}) &= \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{b}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{L}(\mathbf{b}_i). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Κάθε ένα από τα διανύσματα  $\mathcal{L}(\mathbf{b}_k) \in \mathcal{V}$  μπορεί να αναπτυχθεί ως προς την ίδια βάση  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1 \dots n}$  ως:

$$\mathcal{L}(\mathbf{b}_i) = \sum_{k=1}^n l_{ki} \mathbf{b}_k. \quad (4.16)$$

Συνδυάζοντας τις εκφράσεις (4.15) και (4.16) ο μετασχηματισμός του διανύσματος  $\mathbf{v}$  γράφεται:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^n c_i \left( \sum_{k=1}^n l_{ki} \mathbf{b}_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n l_{ki} c_i \right) \mathbf{b}_k \\ &= \sum_{k=1}^n c_k^L \mathbf{b}_k\end{aligned}$$

όπου

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_1^L \\ \vdots \\ c_n^L \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^L} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \quad (4.17)$$

Ο.Ε.Δ.

#### 4.1.4 Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων διανυσματικού χώρου

Οι γραμμικοί διανυσματικοί μετασχηματισμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων ενός διανυσματικού χώρου. Συγκεκριμένα ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

**Πρόταση 4.2.** Έστω γραμμικός διανυσματικός μετασχηματισμός  $\mathcal{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  και σύστημα συντεταγμένων (γραμμικώς ανεξάρτητη βάση)  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1\dots n}$  του  $\mathcal{V}$  και  $\mathbf{L}$  ο πίνακας της εξίσωσης (4.1). Αν ο πίνακας  $\mathbf{L}$  είναι αντιστρέψιμος (δηλ.,  $\det \mathbf{L} \neq 0$ ) τότε τα διανύσματα  $\{\mathcal{L}(\mathbf{b}_i)\}_{i=1\dots n}$  αποτελούν ένα νέο σύστημα συντεταγμένων του  $\mathcal{V}$ .

*Απόδειξη:*

Αρκεί να δείχθει ότι τα νέα  $n$  διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αρχικά, αποδεικνύεται ότι αν  $\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  τότε  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Πράγματι, αν  $\mathbf{c}$  και  $\mathbf{c}^L$  οι συντεταγμένες των  $\mathbf{v}$  και  $\mathcal{L}(\mathbf{v})$  ως προς τη βάση  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1\dots n}$  τότε λόγω της Πρότασης 4.1 ισχύει ότι  $\mathbf{c}^L = \mathbf{L}\mathbf{c}$  και εφόσον ο πίνακας  $\mathbf{L}$  είναι αντιστρέψιμος συνεπάγεται ότι  $\mathbf{c} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{c}^L = \mathbf{0}$ . Κατά συνέπεια  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Στη συνέχεια οι επόμενες συνεπαγωγές αποδεικνύουν τον ισχυρισμό της πρότασης:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}(\mathbf{b}_i) &= \mathbf{0} \Rightarrow \\ \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{b}_i\right) &= \mathbf{0} \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{b}_i &= \mathbf{0} \Rightarrow \\ a_i &= 0, i = 1, \dots, n\end{aligned}$$

Ο.Ε.Δ.

Οι συντεταγμένες ενός οποιουδήποτε διανύσματος  $\mathbf{v}$  του  $\mathcal{V}$  ως προς το νέο σύστημα συντεταγμένων καθορίζονται από την παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 4.3.** Υπό τις προϋποθέσεις της Πρότασης 4.2 και αν  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  οι συντεταγμένες του διανύσματος  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1\dots n}$  και  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$  οι συντεταγμένες του ίδιου διανύσματος ως προς το μετασχηματισμένο σύστημα  $\{\mathcal{L}(\mathbf{b}_i)\}_{i=1\dots n}$  ισχύει ότι:

$$\mathbf{d} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{c}. \quad (4.18)$$

Απόδειξη:

Με χρήση της έκφρασης (4.16), το ανάπτυγμα του διανύσματος  $\mathbf{v}$  ως προς τη νέα βάση γράφεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^n d_i \mathcal{L}(\mathbf{b}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n d_i \sum_{k=1}^n l_{ki} \mathbf{b}_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n d_i l_{ki} \right) \mathbf{b}_k \end{aligned} \quad (4.19)$$

και επειδή οι συντεταγμένες ως προς μία γραμμικώς ανεξάρτητη βάση είναι μοναδικές συνεπάγεται ότι  $c_k = \sum_{i=1}^n d_i l_{ki}$ . Ο.Ε.Δ.

Στο σημείο αυτό έχει ενδιαφέρον να αντιπαραβληθούν οι σχέσεις (4.14) και (4.18).

## 4.2 Χώροι Σημείων

Ένα σύνολο  $\mathcal{A}$  ονομάζεται *σύνολο σημείων* όταν μεταξύ των στοιχείων του και των στοιχείων ενός διανυσματικού χώρου  $\mathcal{V}$  ορίζεται η συνάρτηση  $\oplus : \mathcal{A} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{A}$  με ουδέτερο στοιχείο (από δεξιά) το διάνυσμα  $\mathbf{0}$  ( $\mathbf{p} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{p}, \forall \mathbf{p} \in \mathcal{A}$ ).

Το σημείο  $\mathbf{q} = \mathbf{p} \oplus \mathbf{v}$  (με  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{A}$  και  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ) ονομάζεται μετατόπιση του  $\mathbf{p}$  κατά  $\mathbf{v}$ . Αντίστοιχα το διάνυσμα  $\mathbf{v}$  ονομάζεται διάνυσμα μετατόπισης και συμβολίζεται ως  $\mathbf{v} = \mathbf{q} \ominus \mathbf{p}$ .

Το σύνολο  $\mathcal{A}$  ονομάζεται *χώρος σημείων με αρχή*  $\mathbf{o} \in \mathcal{A}$  όταν για κάθε σημείο του,  $\mathbf{p}$ , υπάρχει  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  τέτοιο ώστε  $\mathbf{p} = \mathbf{o} \oplus \mathbf{v}$ . Συνεπώς ο χώρος σημείων  $\mathcal{A}$  περιγράφεται πλήρως από το διατεταγμένο ζεύγος  $(\mathbf{o}, \mathcal{V})$  και για συντομογραφία μπορεί να χρησιμοποιείται ο συμβολισμός  $\mathcal{A} = (\mathbf{o}, \mathcal{V})$ .

Ο χώρος σημείων  $\mathcal{A}$  μένει αναλλοίωτος αν αντί της αρχής  $\mathbf{o}$  ορισθεί ως αρχή το σημείο  $\mathbf{ó} = \mathbf{o} \oplus \mathbf{v}_0$  και αντί του διανυσματικού χώρου  $\mathcal{V}$  χρησιμοποιηθεί ο διανυσματικός χώρος  $\mathcal{V}' = \mathcal{V} - \mathbf{v}_0 \triangleq \{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0, \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}$ . Ισχύει δηλαδή

$$\mathcal{A} = (\mathbf{o}, \mathcal{V}) \equiv (\mathbf{o} \oplus \mathbf{v}_0, \mathcal{V} - \mathbf{v}_0). \quad (4.20)$$



### 4.2.1 Συστήματα συντεταγμένων χώρου σημείων

Μία οποιαδήποτε γραμμικώς ανεξάρτητη βάση του διανυσματικού χώρου  $\mathcal{V}$  μαζί με την αρχή  $\mathbf{o} \in \mathcal{A}$  ονομάζεται *σύστημα συντεταγμένων του χώρου σημείων*  $\mathcal{A} = (\mathbf{o}, \mathcal{V})$ .

Για ένα δεδομένο σύστημα συντεταγμένων (βάση)  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1\dots n}$  του διανυσματικού χώρου,  $\mathcal{V}$ , και μία συγκεκριμένη αρχή  $\mathbf{o}$  του χώρου σημείων  $\mathcal{A}$ , ορίζεται ένας *ισομορφισμός* του  $\mathcal{A} = (\mathbf{o}, \mathcal{V})$  με το σύνολο  $\mathbb{R}^n$  αν χρησιμοποιηθούν οι συμβάσεις για τον αντίστοιχο ισομορφισμό των διανυσματικών χώρων (βλ. Ενότητα 4.1.2). Υπό αυτές τις συνθήκες κάθε σημείο  $\mathbf{p} = \mathbf{o} \oplus \mathbf{v}$  του  $\mathcal{A}$  αντιστοιχίζεται στις συντεταγμένες  $\mathbf{c}$  του διανύσματος  $\mathbf{v}$  ως προς την προαναφερθείσα συγκεκριμένη βάση.

### 4.2.2 Μετασχηματισμοί και Ομογενείς Συντεταγμένες Σημείου

Οι συναρτήσεις της μορφής  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  που απεικονίζουν ένα οποιοδήποτε σημείο  $\mathbf{p}$  του χώρου σημείων  $\mathcal{A} = (\mathbf{o}, \mathcal{V})$  στο σημείο  $f(\mathbf{p}) \in \mathcal{A}$  ονομάζονται *μετασχηματισμοί σημείου*.

Αν επιπλέον, κάθε σημείο  $\mathbf{p} = \mathbf{o} \oplus \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  αντιστοιχίζεται στο  $\dot{\mathcal{L}}(\mathbf{p}) = \mathbf{o} \oplus \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{v})$  και ο  $\tilde{\mathcal{L}}$  είναι μετασχηματισμός affine του διανυσματικού χώρου  $\mathcal{V}$ , τότε ο μετασχηματισμός σημείου  $\dot{\mathcal{L}}$  ονομάζεται *σημειακός μετασχηματισμός affine*.

Είναι εύκολο με βάση τον παραπάνω ορισμό να αποδειχθεί ότι για δύο σημεία  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{q}$  του  $\mathcal{A}$  ισχύει ότι:

$$\dot{\mathcal{L}}(\mathbf{p}) \ominus \dot{\mathcal{L}}(\mathbf{q}) = \mathcal{L}(\mathbf{p} \ominus \mathbf{q}). \quad (4.21)$$

Η εφαρμογή οποιασδήποτε σημειακού μετασχηματισμού affine έχει σαν αποτέλεσμα την αλλαγή των συντεταγμένων των σημείων κατά ένα τρόπο που υπολογίζεται με χρήση της Πρότασης 4.1. Συγκεκριμένα έστω  $\mathbf{c}_p, \mathbf{c}_q \in \mathbb{R}^n$  οι συντεταγμένες των σημείων  $\mathbf{p} = \mathbf{o} \oplus \mathbf{v}_p$  και  $\mathbf{q} = \mathbf{o} \oplus \mathbf{v}_q$  αντίστοιχα του  $n$ -διάστατου χώρου σημείων  $\mathcal{A}$ . Αν το σημείο  $\mathbf{q} = \dot{\mathcal{L}}(\mathbf{p}) = \mathbf{o} \oplus \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{v}_p)$  τότε  $\mathbf{v}_q = \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{v}_p) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_p) + \mathbf{v}_c$ . Συνεπώς χάρη στην Πρόταση 4.1,

$$\mathbf{c}_q = \mathbf{L}\mathbf{c}_p + \mathbf{c} \quad (4.22)$$

όπου  $\mathbf{c}$  είναι οι συντεταγμένες τους σταθερού διανύσματος  $\mathbf{v}_c$ . Η παραπάνω εξίσωση μετασχηματισμού των συντεταγμένων μπορεί εναλλακτικά να γραφεί ως,

$$\mathbf{c}_{qh} = \mathbf{L}_h \mathbf{c}_{ph} \quad (4.23)$$

όπου τα μήκους  $n + 1$  διανύσματα,

$$\mathbf{c}_{ph} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{c}_p \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{qh} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{c}_q \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

αποτελούν τις λεγόμενες *ομογενείς συντεταγμένες των σημείων*  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{q}$  και

$$\mathbf{L}_h \triangleq \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{L} & \mathbf{c} \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times n} & 1 \end{array} \right] \quad (4.25)$$

Η χρήση των ομογενών συντεταγμένων επιτρέπει την υλοποίηση οποιουδήποτε σημειακού μετασχηματισμού affine μέσω ενός πολλαπλασιασμού πίνακα επί το διάνυσμα των ομογενών συντεταγμένων.

Αν ο γραμμικός διανυσματικός μετασχηματισμός  $\mathcal{L}$  είναι αντιστρέψιμος, και κατά συνέπεια ο αντίστοιχος πίνακας  $\mathbf{L}$  αντιστρέφεται, τότε και ο  $\mathbf{L}_h$  αντιστρέφεται. Συγκεκριμένα, μπορεί εύκολα να επαληθευτεί ότι:

$$\mathbf{L}_h^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{L}^{-1} & -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{c} \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times n} & 1 \end{array} \right]. \quad (4.26)$$

### 4.2.3 Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων χώρου σημείων

Τα σημεία του χώρου σημείων  $\mathcal{A}$  μπορούν να περιγραφούν ως προς εναλλακτικά (άπειρα στο πλήθος) συστήματα συντεταγμένων τα οποία μπορεί να διαφέρουν:

1. Είτε ως προς την θεωρούμενη αρχή (βλ. εξίσωση (4.20)).
2. Είτε ως προς τη θεωρούμενη βάση του διανυσματικού χώρου  $\mathcal{V}$ . Στην περίπτωση αυτή οι συντεταγμένες τροποποιούνται όπως περιγράφεται στην εξίσωση (4.18).
3. Είτε ταυτόχρονα ως προς τα δύο παραπάνω.

Αναλυτικότερα, ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 4.4.** Έστω χώρος σημείων  $\mathcal{A} = (\mathbf{o}, \mathcal{V})$  και γραμμικός διανυσματικός μετασχηματισμός  $\mathcal{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ . Υπό τις προϋποθέσεις της Πρότασης 4.2 σχετικά με την αντιστρεψιμότητα του  $\mathcal{L}$  και αν

1.  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  οι συντεταγμένες του σημείου  $\mathbf{p} \in \mathcal{A}$  ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1\dots n}$  με αρχή το σημείο  $\mathbf{o} \in \mathcal{A}$ ,
2.  $\acute{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n$  οι συντεταγμένες του ίδιου σημείου ως προς το μετασχηματισμένο σύστημα  $\{\mathcal{L}(\mathbf{b}_i)\}_{i=1\dots n}$  με αρχή  $\acute{\mathbf{o}} = \mathbf{o} \oplus \mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{V}$ ,
3.  $\mathbf{c}_0$  οι συντεταγμένες του διανύσματος μετατόπισης  $\mathbf{v}_0$  ως προς τη βάση  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1\dots n}$  και
4.  $\acute{\mathbf{c}}_0$  οι συντεταγμένες του διανύσματος μετατόπισης  $\mathbf{v}_0$  ως προς τη μετασχηματισμένη βάση  $\{\mathcal{L}(\mathbf{b}_i)\}_{i=1\dots n}$ .

ισχύει ότι:

$$\acute{\mathbf{c}} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{c} - \acute{\mathbf{c}}_0 \quad (4.27)$$

*Απόδειξη:*

Το τυχαίο σημείο  $\mathbf{p} = \mathbf{o} \oplus \mathbf{v}$  του  $\mathcal{A}$  έχει συντεταγμένες  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  που ταυτίζονται με τις συντεταγμένες του  $\mathbf{v}$  ως προς τη βάση  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1\dots n}$ . Ως προς τη νέα αρχή  $\acute{\mathbf{o}} = \mathbf{o} \oplus \mathbf{v}_0$  το ίδιο σημείο γράφεται σύμφωνα με την εξίσωση (4.20) ως  $\mathbf{p} = \acute{\mathbf{o}} \oplus (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$ . Συνεπώς οι συντεταγμένες του ως προς την αρχική βάση (αλλά ως προς τη μετατοπισμένη αρχή) ταυτίζονται με τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \in \mathcal{V}$  και είναι  $\mathbf{c} - \mathbf{c}_0$ . Άρα σύμφωνα με την Πρόταση 4.3 (εξίσωση (4.18)) οι συντεταγμένες του ως προς τη μετασχηματισμένη κατά  $\mathcal{L}$  βάση είναι  $\acute{\mathbf{c}} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{c} - \mathbf{c}_0)$ . Η δεύτερη ισότητα στην εξίσωση (4.27) προκύπτει χρησιμοποιώντας εκ νέου την εξίσωση (4.18) στις συντεταγμένες  $\mathbf{c}_0$  του  $\mathbf{v}_0$ . Ο.Ε.Δ.

Η σχέση (4.27) απλουστεύεται αν γραφεί ως προς της ομογενείς συντεταγμένες,

$$\acute{\mathbf{c}}_h \equiv \begin{bmatrix} \acute{\mathbf{c}} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_h \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ 1 \end{bmatrix},$$

υπό τη μορφή,

$$\acute{\mathbf{c}}_h = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{L}^{-1} & -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{c}_0 \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times n} & 1 \end{array} \right] \mathbf{c}_h. \quad (4.28)$$

Είναι ενδιαφέρουσα η σύγκριση του  $(n+1) \times (n+1)$  πίνακα του παραπάνω μετασχηματισμού με τον αντίστροφο του πίνακα ενός σημειακού μετασχηματισμού affine της εξίσωσης (4.26).

### 4.3 Οι Γεωμετρικοί διανυσματικοί χώροι $R^n$

Οι παραπάνω ορισμοί και ιδιότητες ισχύουν σε μία ευρύτατη κατηγορία συνόλων που ικανοποιούν τα αξιώματα των διανυσματικών χώρων και των χώρων σημείων όπως για παράδειγμα σύνολα συναρτήσεων μίας μεταβλητής, σήματα, ακολουθίες κ.λπ. Στην παρούσα ενότητα εξειδικεύονται οι έννοιες του διανυσματικού χώρου και του χώρου σημείων στα σύνολα διανυσμάτων/σημείων που σχετίζονται με τη γεωμετρία.

Τα σύνολα αυτά αποτελούνται από πραγματικά διανύσματα μήκους  $n$ . Ειδικότερο βέβαια ενδιαφέρον δίνεται στις περιπτώσεις διανυσμάτων του επιπέδου ( $n = 2$ ) και του τρισδιάστατου χώρου ( $n = 3$ ).

## 4.4 Ο χώρος των τριών διαστάσεων

Ο γεωμετρικός χώρος των τριών διαστάσεων αντιστοιχεί στο χώρο των σημείων του φυσικού κόσμου. Ακριβέστερα, τα σημεία του *φυσικού κόσμου* αποτελούν στοιχεία ενός συνόλου που έχει τις ιδιότητες ενός χώρου σημείων διάστασης  $n = 3$ . Στο, σχεδόν φιλοσοφικό ερώτημα, ποιά είναι η αρχή (ο) και ποιά η βάση ( $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1..3}$ ) αυτού του χώρου η απάντηση δεν είναι μονοσήμαντη<sup>1</sup>. Η φυσική επιστήμη και τα μαθηματικά απαντούν ότι ο κάθε παρατηρητής μπορεί να ορίσει ένα βασικό αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων και να χρησιμοποιεί πολλά άλλα αρκεί να θυμάται πως αυτά σχετίζονται με το αρχικό.

Η επιστήμη της γραφικής με υπολογιστές δεν ασχολείται με τον φυσικό κόσμο αλλά με προσομοιώσεις του. Τα τρισδιάστατα μοντέλα, οι πηγές φωτός, η κίνηση κ.λπ. επιβιώνουν μέσα σε έναν *εικονικό κόσμο*. Και σε αυτόν τον κόσμο, όμως, η αρχή του *παρατηρητή* ισχύει: Μέσα σε κάθε εικονικό κόσμο ο παρατηρητής - δημιουργός ή/και χρήστης - του ορίζει ένα αυθαίρετο αλλά βασικό σύστημα συντεταγμένων και χρησιμοποιεί πολλά άλλα (δευτερεύοντα) γνωρίζοντας πάντα τις αντιστοιχήσεις τους με το βασικό. Το εν λόγω κύριο σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται *σύστημα συντεταγμένων του κόσμου (world coordinate system - WCS)*.

Δεδομένου του WCS η εφαρμογή γραφικών - υπό τις εντολές του παρατηρητή - επιτελεί σειρές λειτουργιών που κατά βάση κατηγοριοποιούνται σε:

1. Κινήσεις αντικειμένων (μετατοπίσεις, περιστροφές, αλλαγές κλίμακας)
2. Αλλαγές συστήματος συντεταγμένων από και προς το WCS. Όπως:
  - (α') Από το ιδιωτικό σύστημα συντεταγμένων ενός μοντέλου στο WCS.
  - (β') Από το WCS στο σύστημα συντεταγμένων μίας εικονικής κάμερας.
3. Προβολές του τρισδιάστατου κόσμου στις διδιάστατες συντεταγμένες της εικόνας που σχηματίζεται στην έξοδο του συστήματος γραφικών.

Στη συνέχεια αναλύονται τα δύο πρώτα είδη μετασχηματισμού (κινήσεις και αλλαγές συστήματος συντεταγμένων) ενώ οι μετασχηματισμοί προβολής εξετάζονται αμέσως μετά την παρουσίαση του χώρου των δύο διαστάσεων που ακολουθεί.

---

<sup>1</sup>Υπενθυμίζεται πάντως ότι παρόμοια ερωτήματα οδήγησαν στην πυρά της Ιεράς Εξέτασης αρκετούς στοχαστές σε παρελθόντες αιώνες.

#### 4.4.1 Καρτεσιανές και ομογενείς συντεταγμένες

Παραδοσιακά τα διανύσματα του τρισδιάστατου κόσμου αναπαρίστανται από τα στοιχεία του συνόλου  $\mathbb{R}^3$  ως,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

όπου οι πραγματικοί αριθμοί  $x, y, z$  υποδηλώνουν τις συντεταγμένες  $\mathbf{c}$  του  $\mathbf{v}$  ως προς την ορθοκανονική βάση  $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$ . Η εν λόγω βάση καθορίζει τις *κατευθύνσεις* και τις *μονάδες μέτρησης* στους λεγόμενους καρτεσιανούς άξονες  $x, y$  και  $z$ . Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι η αναπαράσταση του διανύσματος  $\mathbf{v}$  μέσω των συντεταγμένων του  $\mathbf{c}$  είναι εφαρμογή του ισομορφισμού που διαπιστώθηκε στην Ενότητα 4.1.2.

Αντίστοιχα, τα σημεία του τρισδιάστατου κόσμου καθορίζονται από την αυθαίρετα τοποθετημένη αρχή του και το διάνυσμα  $\mathbf{v}$  που οδηγεί από την αρχή αυτή στη θέση του σημείου. Οι συντεταγμένες του σημείου καθορίζονται από τις συντεταγμένες  $\mathbf{c}$  του  $\mathbf{v}$  όπως παραπάνω.

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι το σύνολο των διανυσμάτων του τρισδιάστατου κόσμου είναι ένας διανυσματικός χώρος,  $\mathcal{V}^{3D}$ , διάστασης  $n = 3$  με τις πράξεις της διανυσματικής πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ορισμένες όπως στο διανυσματικό χώρο  $\mathbb{R}^3$ . Εντελώς ανάλογα το σύνολο των σημείων του τρισδιάστατου κόσμου είναι ένας χώρος σημείων  $\mathcal{A}^{3D}$ . Η αρχή  $\mathbf{o}$  του χώρου σημείων είναι (ισόμορφη προς) το σημείο  $[0, 0, 0]^T$ . Η πράξη της μετατόπισης  $\oplus$  ορίζεται αντίστοιχα μέσω της πρόσθεσης στο σύνολο  $\mathbb{R}^3$ .

Με βάση τα παραπάνω, αν  $\mathbf{v} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} = [x, y, z]^T \in \mathcal{V}^{3D}$  και  $\mathbf{p} \in \mathcal{A}^{3D}$  ένα σημείο του τρισδιάστατου χώρου με συντεταγμένες  $x, y, z$  ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\mathbf{p} = \mathbf{o} \oplus \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

και αν το σημείο  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ , τότε η μετατόπισή του,  $\mathbf{p}$ , κατά το διάνυσμα  $\mathbf{v}$  υπολογίζεται ως,

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} \oplus \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Συνοψίζοντας, ο παραδοσιακός τρόπος αναπαράστασης των διανυσμάτων και των σημείων των χώρων  $\mathcal{V}^{3D}$  και  $\mathcal{A}^{3D}$  αντίστοιχα γίνεται μέσω στοιχείων του συνόλου  $\mathbb{R}^3$ . Ωστόσο, όπως θα διαφανεί

στις επόμενες ενότητες, ένας προσηφορότερος για τον τομέα της Γραφικής με Υπολογιστές τρόπος αναπαράστασης είναι μέσω της χρήσης των λεγόμενων *ομογενών συντεταγμένων*. Η αναπαράσταση αυτή αντιστοιχίζει τα διανύσματα του χώρου  $\mathcal{V}^{3D}$  σε διανύσματα του  $\mathbb{R}^4$  στα οποία οι τρεις πρώτες συνιστώσες είναι οι συντεταγμένες ως προς την ορθοκανονική βάση  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$  και η τέταρτη είναι ίση προς το 0. Δηλαδή,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Και πάλι η διανυσματική πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ορίζονται όπως στο χώρο  $\mathbb{R}^4$ . Αντίστοιχα ο χώρος σημείων  $\mathcal{A}^{3D}$  παριστάνεται από στοιχεία του συνόλου  $\mathbb{R}^4$  με το την τέταρτη συνιστώσα δεσμευμένη στην τιμή 1, δηλαδή

$$\mathbf{p} = \mathbf{o} \oplus \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

#### 4.4.2 Μετασχηματισμοί affine στις 3 διαστάσεις

##### Μετατόπιση σημείου $\mathbf{p}$ κατά διάνυσμα $\mathbf{t}$

Η μετατόπιση σημείου κατά διάνυσμα, τόσο στις παραδοσιακές όσο και στις ομογενείς συντεταγμένες, υλοποιείται μέσω της πρόσθεσης των αντίστοιχων συνιστωσών.

Συγκεκριμένα στις παραδοσιακές συντεταγμένες η μετατόπιση του σημείου  $\mathbf{p} = [x, y, z]^T$  κατά  $\mathbf{t} = [t_x, t_y, t_z]^T$  ισούται με

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} \oplus \mathbf{t} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Αντίστοιχα, στις ομογενείς συντεταγμένες, η μετατόπιση του σημείου  $\mathbf{p} = [x, y, z, 1]^T$  κατά  $\mathbf{t} = [t_x, t_y, t_z, 0]^T$  ισούται με

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} \oplus \mathbf{t} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Η εξίσωση (4.35) μπορεί επίσης να γραφεί σε μορφή πολλαπλασιασμού πίνακα επί διάνυσμα ως,

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}_h \mathbf{p} \quad (4.36)$$

όπου

$$\mathbf{T}_h \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Είναι εμφανές ότι ο μετασχηματισμός μετατόπισης ανήκει στην κατηγορία των σημειακών μετασχηματισμών τύπου affine με πίνακα γραμμικού μετασχηματισμού  $\mathbf{L}$  και συντεταγμένες του σταθερού διανύσματος μετατόπισης,  $\mathbf{c}$ , που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{t}.$$

Ο πίνακας του αντίστροφου μετασχηματισμού προκύπτει εφαρμόζοντας τη σχέση (4.26):

$$\mathbf{T}_h^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & 0 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 & -t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

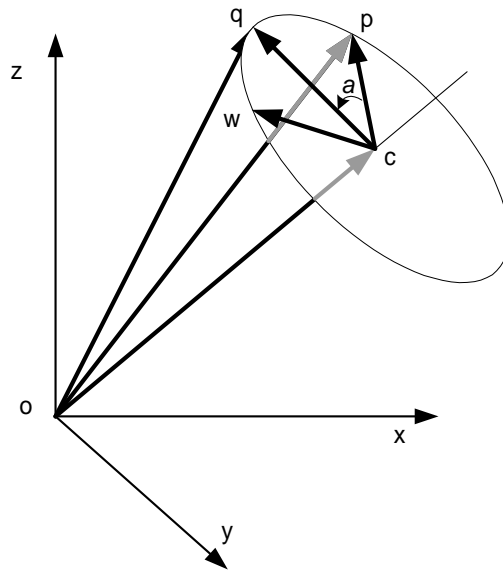
### Περιστροφή σημείου $\mathbf{p}$ περί άξονα $\mathbf{u}$ κατά γωνία $\alpha$

Η περιστροφή ενός σημείου του τρισδιάστατου κόσμου καθορίζεται από δύο - μεταξύ τους ανεξάρτητα - στοιχεία:

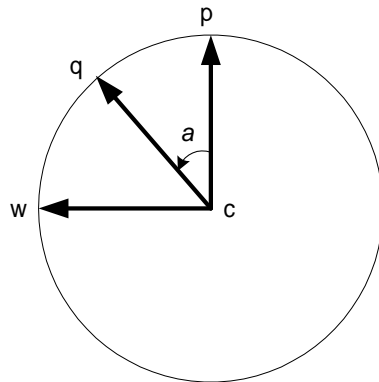
1. Τον άξονα περιστροφής. Ο άξονας περιστροφής είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και η κατεύθυνσή του προσδιορίζεται από μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{u}$ .
2. Τη γωνία περιστροφής  $\alpha$ .

Τα δύο αυτά στοιχεία προσδιορίζουν το μετασχηματισμό περιστροφής,  $\mathbf{q}$ , του σημείου  $\mathbf{p}$  ως το σημείο που προκύπτει αν το  $\mathbf{p}$  μετακινηθεί κατά τόξο  $\alpha$  πάνω σε κύκλο που βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα το οποίο διέρχεται από το  $\mathbf{p}$ . Η περιστροφή κατά  $\alpha$  έχει ως θετική φορά αυτή του δεξιόστροφου κοχλίου που κινείται κατά την κατεύθυνση του  $\mathbf{u}$ . Η διαδικασία περιστροφής απεικονίζεται στο Σχήμα 4.1.

Οι συντεταγμένες του περιστραμμένου σημείου  $\mathbf{q}$  υπολογίζονται ως εξής:



Σχήμα 4.1: Τρισδιάστατη περιστροφή σημείου περί αυθαίρετο άξονα : Το σημείο  $Q$  προκύπτει από περιστροφή σημείου  $P$  περί άξονα  $u$  κατά γωνία  $a$



Σχήμα 4.2: Τρισδιάστατη περιστροφή σημείου περί αυθαίρετο άξονα: Προβολή στο επίπεδο περιστροφής.



1. Τόσο το  $\mathbf{p}$  όσο και το  $\mathbf{q}$  αναλύονται ως,

$$\mathbf{p} = \mathbf{o} \oplus \vec{op} = \mathbf{o} \oplus (\vec{oc} + \vec{cp}) \quad (4.38)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{o} \oplus \vec{oq} = \mathbf{o} \oplus (\vec{oc} + \vec{cq}) \quad (4.39)$$

όπου τα διανύσματα  $\vec{op}$ ,  $\vec{oq}$ ,  $\vec{oc}$ ,  $\vec{cp}$ ,  $\vec{cq}$  ορίζονται μέσω των άκρων τους (π.χ.,  $\vec{op} = \mathbf{p} \ominus \mathbf{o}$ ).

2. Η κοινή συνιστώσα  $\vec{oc}$  είναι η προβολή του διανύσματος  $\vec{op}$  (ισοδύναμα του  $\vec{oq}$ ) στον άξονα που ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{u}$ . Επομένως,

$$\vec{oc} = \langle \vec{op}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}, \quad (4.40)$$

όπου με  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$  συμβολίζεται το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{u}$ . Η συνιστώσα  $\vec{oc}$  προφανώς μένει αναλλοίωτη κατά την περιστροφή.

3. Το διάνυσμα  $\vec{cq}$  υπολογίζεται από το διάνυσμα  $\vec{cp}$  με τη βοήθεια του Σχήματος 4.2. Στο σχήμα αυτό το επίπεδο περιστροφής έχει ταυτιστεί με το επίπεδο της σελίδας. Πάνω στο επίπεδο αυτό ορίζεται το διάνυσμα  $\vec{cw}$  που είναι κάθετο τόσο στο  $\vec{cp}$  όσο και στο  $\mathbf{u}$ , και έχει το ίδιο μήκος με το  $\vec{cp}$ :

$$\begin{aligned} \vec{cw} &= \mathbf{u} \times \vec{cp} \\ &= \mathbf{u} \times (\vec{op} - \vec{oc}) \\ &= \mathbf{u} \times \vec{op} \end{aligned} \quad (4.41)$$

όπου στην τελευταία εξίσωση χρησιμοποιήθηκε η παραλληλία των διανυσμάτων  $\vec{oc}$  και  $\mathbf{u}$  που καθιστά το εξωτερικό τους γινόμενο ίσο προς το  $\mathbf{0}$ . Το διάνυσμα  $\vec{cq}$  αναλύεται σε δύο συνιστώσες παράλληλες προς τα  $\vec{cp}$  και  $\vec{cw}$  αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} \vec{cq} &= \cos a \vec{cp} + \sin a \vec{cw} \\ &= \cos a (\vec{op} - \vec{oc}) + \sin a (\mathbf{u} \times \vec{op}) \\ &= \cos a (\vec{op} - \langle \vec{op}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}) + \sin a (\mathbf{u} \times \vec{op}) \end{aligned} \quad (4.42)$$

όπου στη δεύτερη γραμμή χρησιμοποιήθηκε η σχέση (4.41) και στην τρίτη γραμμή η σχέση (4.40).

4. Από το συνδυασμό των σχέσεων (4.39), (4.40) και (4.42) προκύπτει ότι τελικά

$$\mathbf{q} = \mathbf{o} \oplus [(1 - \cos a) \langle \vec{op}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} + \cos a \vec{op} + \sin a (\mathbf{u} \times \vec{op})]. \quad (4.43)$$

Η εξίσωση (4.43) ονομάζεται τύπος του Rodrigues.

Με τη χρήση συμβατικών - μη ομογενών - συντεταγμένων ο τύπος του Rodrigues γράφεται,

$$\mathbf{v}_q = \mathbf{R}\mathbf{v}_p \quad (4.44)$$

όπου

$$\mathbf{v}_p \equiv \vec{op} = \begin{bmatrix} v_{px} \\ v_{py} \\ v_{pz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_q \equiv \vec{oq} = \begin{bmatrix} v_{qx} \\ v_{qy} \\ v_{qz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

τα διανύσματα που αντιστοιχούν στα σημεία  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  και στον άξονα  $\mathbf{u}$  και

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\triangleq (1 - \cos \alpha) \begin{bmatrix} u_x^2 & u_x u_y & u_x u_z \\ u_y u_x & u_y^2 & u_y u_z \\ u_z u_x & u_z u_y & u_z^2 \end{bmatrix} + \cos \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin \alpha \begin{bmatrix} 0 & u_z & -u_y \\ -u_z & 0 & u_x \\ u_y & -u_x & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 - \cos \alpha)u_x^2 + (\cos \alpha) & (1 - \cos \alpha)u_x u_y + (\sin \alpha)u_z & (1 - \cos \alpha)u_x u_z - (\sin \alpha)u_y \\ (1 - \cos \alpha)u_y u_x - (\sin \alpha)u_z & (1 - \cos \alpha)u_y^2 + (\cos \alpha) & (1 - \cos \alpha)u_y u_z + (\sin \alpha)u_x \\ (1 - \cos \alpha)u_z u_x + (\sin \alpha)u_y & (1 - \cos \alpha)u_z u_y - (\sin \alpha)u_x & (1 - \cos \alpha)u_z^2 + (\cos \alpha) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Η εξίσωση περιστροφής (4.44) ορίζει ένα γραμμικό μετασχηματισμό στο χώρο  $\mathcal{V}^{3D}$  με πίνακα μετασχηματισμού τον  $\mathbf{R}$ . Από την πρώτη γραμμή της έκφρασης (4.45) γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός που αντιστοιχεί σε περιστροφή περί τον  $\mathbf{u}$  κατά γωνία  $-\alpha$  επιτυγχάνεται με πολλαπλασιασμό του διανύσματος  $\mathbf{v}_p$  επί τον πίνακα  $\mathbf{R}^T$ , δηλαδή,

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad (4.46)$$

ή ισοδύναμα,

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (4.47)$$

Με τη χρήση ομογενών συντεταγμένων, η σχέση (4.44) μετασχηματίζεται στην,

$$\mathbf{v}_q = \mathbf{R}_h \mathbf{v}_p \quad (4.48)$$

όπου τώρα

$$\mathbf{v}_p = \begin{bmatrix} v_{px} \\ v_{py} \\ v_{pz} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_q = \begin{bmatrix} v_{qx} \\ v_{qy} \\ v_{qz} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

τα διανύσματα που αντιστοιχούν στα σημεία  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  και στον άξονα  $\mathbf{u}$  και

$$\mathbf{R}_h \triangleq \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right]. \quad (4.49)$$

Η σχέση (4.48) ορίζει και πάλι ένα γραμμικό μετασχηματισμό στο διανυσματικό χώρο  $\mathcal{V}^{3D}$  με αντίστροφο τον

$$\mathbf{R}_h^{-1} = \mathbf{R}_h^T = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{R}^T & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right]. \quad (4.50)$$

Είναι σημαντικό να παρατηρηθεί ότι ο μετασχηματισμός περιστροφής είναι σημειακός μετασχηματισμός τύπου affine στο χώρο  $\mathcal{A}^{3D}$  με πίνακα γραμμικού μετασχηματισμού τον  $\mathbf{R}$  και συντεταγμένες σταθερού διανύσματος  $\mathbf{c} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$ . Συνεπώς, όταν τα σημεία  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  εκφραστούν με τη χρήση ομογενών συντεταγμένων σαν διανύσματα του  $\mathbb{R}^4$  της μορφής,

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} v_{px} \\ v_{py} \\ v_{pz} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} v_{qx} \\ v_{qy} \\ v_{qz} \\ 1 \end{bmatrix},$$

τότε αυτά συνδέονται με μία σχέση ανάλογη της (4.48), δηλαδή,

$$\mathbf{q} = \mathbf{R}_h \mathbf{p} \quad (4.51)$$

όπως προκύπτει από τη χρήση της γενικής σχέσης (4.25).

#### **Διαστολή/Συστολή κατά $s_x$ , $s_y$ και $s_z$**

Η διαστολή (συστολή) έχει σαν αποτέλεσμα την αλλαγή της θέσης των σημείων του κόσμου ώστε αυτά να απομακρυνθούν από (πλησιάσουν) την αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

Στο παραδοσιακό σύστημα συντεταγμένων η διαστολή/συστολή περιγράφεται από οποιοδήποτε γραμμικό μετασχηματισμό των διανυσμάτων που ορίζουν τα σημεία με διαγώνιο πίνακα μετασχηματισμού. Έτσι το σημείο  $\mathbf{p} = \mathbf{o} \oplus \mathbf{v}_p$  μετασχηματίζεται στο  $\mathbf{q} = \mathbf{o} \oplus \mathbf{v}_q$  όπου,

$$\mathbf{v}_q = \mathbf{S} \mathbf{v}_p, \quad (4.52)$$

και

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Στην ειδική περίπτωση  $s_x = s_y = s_z = s$  ο παραπάνω πίνακας γράφεται  $\mathbf{S} = s\mathbf{I}_{3 \times 3}$  και η αντίστοιχη συστολή/διαστολή είναι ομοιόμορφη προς όλες τις κατευθύνσεις.

Με τη χρήση ομογενών συντεταγμένων η σχέση (4.52) γράφεται

$$\mathbf{v}_q = \mathbf{S}_h \mathbf{v}_p, \quad (4.54)$$

όπου τώρα τα διανύσματα  $\mathbf{v}_p$  και  $\mathbf{v}_q$  ανήκουν στο  $\mathbb{R}^4$  και η τελευταία συνιστώσα είναι δεσμευμένη ως συνήθως στο 0. Ο  $4 \times 4$  πίνακας του σημειακού μετασχηματισμού τύπου affine δίνεται από τη σχέση,

$$\mathbf{S}_h = \left[ \begin{array}{ccc|c} \mathbf{S} & & & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times 3} & & & 1 \end{array} \right] \quad (4.55)$$

Είναι σημαντικό να παρατηρηθεί ότι όταν τα σημεία  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  του χώρου σημείων  $\mathcal{A}^{3D}$  εκφραστούν με τη χρήση ομογενών συντεταγμένων σαν διανύσματα του  $\mathbb{R}^4$  τότε αυτά συνδέονται με μία σχέση ανάλογη της (4.54), δηλαδή,

$$\mathbf{q} = \mathbf{S}_h \mathbf{p} \quad (4.56)$$

όπως άλλωστε προκύπτει και από την εφαρμογή της γενικής σχέσης (4.23).

Η αντιστροφή του μετασχηματισμού είναι εφικτή όταν ο πίνακας  $\mathbf{S}$  αντιστρέφεται, δηλαδή όταν τα  $s_x$ ,  $s_y$  και  $s_z$  είναι όλα διάφορα του μηδενός. Τότε,

$$\mathbf{S}_h^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_z} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (4.57)$$

### 4.4.3 Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων

Κάνοντας την υπόθεση ότι οι συντεταγμένες των σημείων του  $\mathcal{A}^{3D}$  είναι γνωστές ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων (π.χ. το WCS), ο όρος αλλαγή συστήματος συντεταγμένων αναφέρεται στον εκ νέου υπολογισμό των *συντεταγμένων* των σημείων του  $\mathcal{A}^{3D}$  ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων με διαφορετική αρχή και διαφορετική βάση. Προϋπόθεση για τη λύση του προβλήματος είναι να είναι γνωστή η έκφραση της νέας αρχής και της νέας βάσης ως προς το αρχικό σύστημα συντεταγμένων.

Η παραπάνω προϋπόθεση ικανοποιείται εάν είναι γνωστή η μετατόπιση της αρχής του νέου συστήματος ως προς το αρχικό και επίσης ο διανυσματικός μετασχηματισμός μέσω του οποίου από την αρχική βάση διανυσμάτων (π.χ.,  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ ) παράγεται η βάση του νέου συστήματος. Η Πρόταση 4.4 μπορεί άμεσα να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των νέων συντεταγμένων εάν ο μετασχηματισμός των διανυσμάτων της βάσης είναι γραμμικός.

Ειδικότερα η σχέση (4.27) για την περίπτωση συμβατικών συντεταγμένων ή εναλλακτικά η σχέση (4.28) εφόσον χρησιμοποιούνται ομογενείς συντεταγμένες δίνουν τις νέες συντεταγμένες στις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Απλή μετατόπιση της αρχής των αξόνων κατά διάνυσμα  $\mathbf{t}$ :  $\mathbf{L} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$  και  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{t}$ .

2. Περιστροφή του συστήματος συντεταγμένων περί άξονα  $\mathbf{u}$  κατά γωνία  $\alpha$  (χωρίς μετατόπιση της αρχής): Τα νέα διανύσματα βάσης είναι τα  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{R}\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{R}\hat{\mathbf{z}}$  όπου ο  $3 \times 3$  πίνακας  $\mathbf{R}$  δίνεται από τη σχέση (4.45). Συνεπώς  $\mathbf{L} = \mathbf{R}$  και  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{0}$ .
3. Αλλαγή κλίμακας του συστήματος συντεταγμένων: Τα νέα διανύσματα βάσης είναι της μορφής  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{x}} = s_x\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{y}} = s_y\hat{\mathbf{y}}$  και  $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{z}} = s_z\hat{\mathbf{z}}$  όπου ο  $3 \times 3$  πίνακας  $\mathbf{S}$  δίνεται από τη σχέση (4.53). Τα δεύτερα μέλη των ισοτήτων προκύπτουν από την παρατήρηση ότι  $\hat{\mathbf{x}} = [1, 0, 0]^T, \hat{\mathbf{y}} = [0, 1, 0]^T$  και  $\hat{\mathbf{z}} = [0, 0, 1]^T$ . Συνεπώς οι σχέσεις μετασχηματισμού των συντεταγμένων εφαρμόζονται με  $\mathbf{L} = \mathbf{S}$  και  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{0}$ .

## 4.5 Ο χώρος των δύο διαστάσεων

Ο γεωμετρικός χώρος των δύο διαστάσεων αντιστοιχεί στο χώρο των σημείων του επιπέδου. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου έχει τις ιδιότητες ενός χώρου σημείων διάστασης  $n = 2$ .

Σε αντιστοιχία με την παραδοσιακή αναπαράσταση των διανυσμάτων του τρισδιάστατου κόσμου, τα διανύσματα του επιπέδου αναπαρίστανται από τα στοιχεία του συνόλου  $\mathbb{R}^2$  ως,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

όπου οι πραγματικοί αριθμοί  $x, y$  υποδηλώνουν τις συντεταγμένες  $c$  του  $\mathbf{v}$  ως προς την ορθοκανονική βάση  $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}\}$ . Η εν λόγω βάση καθορίζει τις κατευθύνσεις και τις μονάδες μέτρησης στους λεγόμενους καρτεσιανούς άξονες  $x, y$ .

Αντίστοιχα, τα σημεία του επιπέδου καθορίζονται από την αυθαίρετα τοποθετημένη αρχή του και το διάνυσμα  $\mathbf{v}$  που οδηγεί από την αρχή αυτή στη θέση του κάθε σημείου. Οι συντεταγμένες του σημείου καθορίζονται από τις συντεταγμένες  $c$  του  $\mathbf{v}$  όπως παραπάνω.

Όπως και στην περίπτωση του τρισδιάστατου κόσμου, έτσι και στην περίπτωση του επιπέδου, το σύνολο των διανυσμάτων του είναι ένας διανυσματικός χώρος,  $\mathcal{V}^{2D}$ , διάστασης  $n = 2$  με τις πράξεις της διανυσματικής πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ορισμένες όπως στο διανυσματικό χώρο  $\mathbb{R}^2$ . Εντελώς ανάλογα το σύνολο των σημείων του επιπέδου είναι ένας χώρος σημείων  $\mathcal{A}^{2D}$ . Η αρχή  $\mathbf{o}$  του χώρου σημείων είναι (ισόμορφη προς) το σημείο  $[0, 0]^T$ . Η πράξη της μετατόπισης  $\oplus$  ορίζεται αντίστοιχα μέσω της πρόσθεσης στο σύνολο  $\mathbb{R}^2$ .

Με βάση τα παραπάνω, αν  $\mathbf{v} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} = [x, y]^T \in \mathcal{V}^{2D}$  και  $\mathbf{p} \in \mathcal{A}^{2D}$  ένα σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες  $x, y$  ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\mathbf{p} = \mathbf{o} \oplus \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

και αν το σημείο  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ , τότε η μετατόπισή του,  $\mathbf{p}$ , κατά το διάνυσμα  $\mathbf{v}$  υπολογίζεται ως,

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} \oplus \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + x' \\ y + y' \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

Η αναπαράσταση μέσω *ομογενών συντεταγμένων*, αντιστοιχίζει τα διανύσματα του χώρου  $\mathcal{V}^{2D}$  σε διανύσματα του  $\mathbb{R}^3$  στα οποία οι δύο πρώτες συνιστώσες είναι οι συντεταγμένες ως προς την ορθοκανονική βάση  $\{\hat{x}, \hat{y}\}$  και η τρίτη είναι ίση προς το 0. Δηλαδή,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

Αντίστοιχα ο χώρος σημείων  $\mathcal{A}^{2D}$  παριστάνεται από στοιχεία του συνόλου  $\mathbb{R}^3$  με την τρίτη συνιστώσα δεσμευμένη στην τιμή 1, δηλαδή

$$\mathbf{p} = \mathbf{o} \oplus \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

#### 4.5.1 Μετασχηματισμοί affine και αλλαγή συστήματος συντεταγμένων στις 2 διαστάσεις

Η μετατόπιση, η περιστροφή περί την αρχή του συστήματος συντεταγμένων κατά γωνία  $a$  και η διαστολή/συστολή είναι μετασχηματισμοί σημείου τύπου affine. Μέσω αυτών, ένα σημείο  $\mathbf{p} = \mathbf{o} \oplus \mathbf{v}_p$  μετασχηματίζεται στο σημείο  $\mathbf{q} = \dot{\mathcal{L}}(\mathbf{p}) = \mathbf{o} \oplus \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{v}) = \mathbf{o} \oplus [\mathcal{L}(\mathbf{v}) + \mathbf{v}_c]$ . Οι αντίστοιχοι πίνακες ( $\mathbf{L}$ ) και διανύσματα ( $\mathbf{c}$ ) δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Μετασχηματισμός	Πίνακας $\mathbf{L}$ του αντίστοιχου γραμμικού μετασχηματισμού $\mathcal{L}$	Συντεταγμένες $\mathbf{c}$ του σταθερού διανύσματος $\mathbf{v}_c$ του σημειακού μετασχηματισμού affine
Μετατόπιση κατά $\mathbf{t} = [t_x, t_y]^T$	$\mathbf{L} = \mathbf{I}_{2 \times 2}$	$\mathbf{c} = \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$
Περιστροφή περί την αρχή των αξόνων κατά γωνία $a$	$\mathbf{L} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}$	$\mathbf{c} = \mathbf{0}_{2 \times 1}$
Διαστολή/Συστολή κατά $s_x, s_y$	$\mathbf{L} = \mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$	$\mathbf{c} = \mathbf{0}_{2 \times 1}$

## Κεφάλαιο 5

# Θέαση του τρισδιάστατου κόσμου :

## Από τις 3 στις 2 Διαστάσεις

### 5.1 Εισαγωγή στις προβολές με στοιχεία φυσικής οπτικής

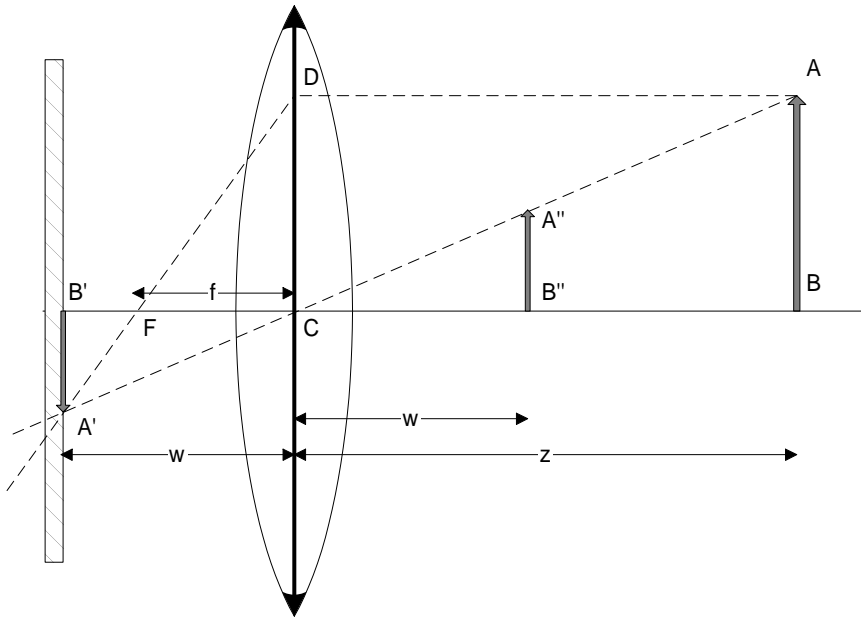
Η διαμόρφωση της εικόνας του φυσικού κόσμου υπό τον οπτικό μετασχηματισμό που εισάγουν (διαθλαστικοί) φακοί και κάτοπτρα είναι μελετάται συστηματικά από την γεωμετρική οπτική φυσική. Οι έννοιες της εστίασης, της εστιακής απόστασης, του πετάσματος, της σημειακής φωτεινής πηγής και του ειδώλου αποτελούν λέξεις κλειδιά στην ανάλυση του τρόπου που ο τρισδιάστατος φυσικός κόσμος προβάλεται στην επίπεδη (διδιάστατη) επιφάνεια ενός πετάσματος όταν η φωτεινή ακτινοβολία των αντικειμένων που τον αποτελούν περνά μέσα από έναν διαθλαστικό φακό.

Ο μηχανισμός γέννησης του ειδώλου με τους κανόνες της γεωμετρικής οπτικής παριστάνεται απλουστευτικά στο Σχήμα 5.1. Αναλυτικότερα, η θέση του ειδώλου  $A'$  ενός τυχαίου σημείου  $A$  εντοπίζεται από την τομή δύο χαρακτηριστικών γραμμών: (α) μίας ευθείας που ξεκινά από το σημείο  $A$  και διέρχεται από το κέντρο  $C$  του φακού και (β) μίας τεθλασμένης που το πρώτο τμήμα της ( $AD$ ) είναι παράλληλο στον άξονα  $FC$  του φακού και το δεύτερο τμήμα της ξεκινά από το σημείο τομής,  $D$ , του πρώτου με το επίπεδο του φακού και στη συνέχεια διέρχεται από την εστία  $F$ . Όταν το εν λόγω σημείο τομής βρίσκεται στο επίπεδο του πετάσματος τότε το  $A$  έχει ένα εστιασμένο είδωλο  $A'$ . Σε κάθε άλλη περίπτωση το  $A$  προβάλεται σε μία περιοχή σημείων (μη εστιασμένο είδωλο). Στις επόμενες ενότητες η προβολές θα θεωρούνται εστιασμένες.

Από τη γεωμετρία του Σχήματος 5.1 προκύπτει ότι η απόσταση  $A'B'$  του σημείου  $A'$  από τον άξονα του φακού υπολογίζεται από τη σχέση,

$$\frac{|A'B'|}{|w|} = \frac{|AB|}{|z|}, \quad (5.1)$$

όπου  $|w| = |CB'|$  η απόσταση του φακού από το πέτασμα και  $|z| = |CB|$  η οριζόντια απόσταση του



Σχήμα 5.1: Η αρχή λειτουργίας της προοπτικής προβολής: Σύστημα κυρτού φακού και πετάσματος εστιασμένου στο αντικείμενο  $AB$ . Το είδωλο  $A'B'$  του αντικειμένου είναι ανεστραμμένο. Με  $A''B''$  παριστάνεται το ισοδύναμο είδωλο σε ορθή θέση μπροστά από το φακό.

προβαλλόμενου σημείου  $A$  από το επίπεδο του φακού.

Αν και από φυσικής άποψης το είδωλο (προβολή) του σημείου  $A$  είναι το  $A'$ , από μαθηματικής άποψης είναι πιο βολικό να θεωρείται ως είδωλο το συμμετρικό του  $A'$  ως προς  $C$ , δηλαδή το σημείο  $A''$ . Τα  $A'$  και  $A''$  έχουν την ίδια απόσταση από τον άξονα του φακού αλλά αντίθετο πρόσημο. Στη συνέχεια αυτή η ισοδυναμία θα χρησιμοποιηθεί έτσι ώστε να υιοθετηθεί το απλουστευμένο (αλλά απολύτως ισοδύναμο προς το πραγματικό) μοντέλο *σημειακής προοπτικής προβολής* του Σχήματος 5.2. Το επίπεδο  $P$  που απέχει κατά  $w$  από το κέντρο προβολής  $C$  ονομάζεται επίπεδο προβολής και αντίστοιχα προς την (5.1) ισχύει η σχέση,

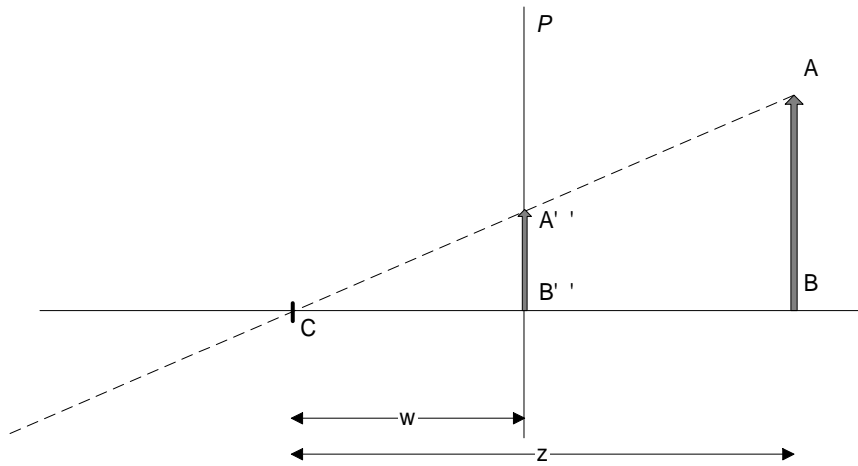
$$\frac{A''B''}{w} = \frac{AB}{z}. \quad (5.2)$$

Συνεπώς κατά την προοπτική προβολή η απόσταση του ειδώλου από τον άξονα προβολής είναι (α) ανάλογη της απόστασης του προβαλλόμενου σημείου από τον ίδιο άξονα ( $|AB|$ ), (β) αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης του προβαλλόμενου σημείου από το επίπεδο προβολής ( $|z| = |BC|$ ).

Ας υποθεθεί τώρα ότι δύο σημεία  $A_1, A_2$  απέχουν από τον άξονα προβολής κατά  $|A_1B_1| = x$  και  $|A_2B_2| = ax$  αντίστοιχα, ενώ η απόστασή τους από το επίπεδο προβολής διαφέρει κατά  $\Delta z$  ( $z_1 = z, z_2 = z + \Delta z$ ). Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.2) για κάθε ένα από τα αντίστοιχα είδωλα προκύπτει ότι για σταθερό  $\Delta z$ ,

$$\frac{A_2''B_2''}{A_1''B_1''} = \frac{wax \frac{1}{z+\Delta z}}{wx \frac{1}{z}} = a \frac{z}{z+\Delta z} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} a. \quad (5.3)$$





Σχήμα 5.2: Το απλουστευμένο μοντέλο προοπτικής προβολής καθόλα ισοδύναμο με αυτό του Σχήματος 5.1.

Η παραπάνω παρατήρηση δίνει το φυσικό νόημα της λεγόμενης *ορθογραφικής προβολής*. Συγκεκριμένα προκύπτει ότι όταν εξετάζονται οι προβολές ενός συνόλου σημείων που απέχουν περίπου  $z$  από το επίπεδο προβολής ενώ η μεταξύ τους απόσταση (κατά την κατεύθυνση του άξονα προβολής) είναι  $\Delta z \ll z$  τότε η απόσταση των προβολών τους από τον άξονα είναι *σχεδόν ανάλογη* της απόστασης των προβαλλόμενων σημείων από τον ίδιο άξονα αφού η σύγκριση που υφίστανται τα είδωλα είναι περίπου σταθερή  $s = \frac{w}{z} \approx \frac{w}{z+\Delta z}$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας το μοντέλο *ορθογραφικής ή παράλληλης προβολής* θεωρεί  $s = 1$ . Το μοντέλο είναι ικανοποιητικά ακριβές για  $z > 10\Delta z$ .

Με βάση τις προηγούμενες εισαγωγικές παρατηρήσεις, στην επόμενη ενότητα παρουσιάζονται τα μοντέλα προοπτικής και ορθογραφικής προβολής σημείων του τρισδιάστατου κόσμου στο επίπεδο (προβολής).

## 5.2 Μετασχηματισμοί προοπτικής και ορθογραφικής προβολής

### 5.2.1 Προοπτική προβολή

Στο απλουστευτικό μοντέλο προοπτικής προβολής των Σχημάτων 5.1 και 5.2 έχει εμφανώς παραληφθεί η τρίτη διάσταση  $y$ . Γίνεται όμως εύκολα αντιληπτό ότι η συνιστώσα  $y$  των προβαλλόμενων σημείων συμπεριφέρεται ακριβώς ανάλογα με τη συνιστώσα  $x$ .

Έστω, λοιπόν, μία (εικονική) κάμερα που ως οπτική διάταξη συμπεριφέρεται σύμφωνα με την εξίσωση (5.2). Ο μετασχηματισμός προοπτικής προβολής ως προς το σύστημα συντεταγμένων της κάμερας  $\hat{x}_c, \hat{y}_c, \hat{z}_c$  υπολογίζεται από την εξίσωση (5.2) με τις εξής παραδοχές:

1. Το κέντρο  $C$  της προβολής ταυτίζεται με την αρχή του συστήματος συντεταγμένων της κάμ-

ερας.

2. Ο άξονας του φακού ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{z}_c$ .
3. Το επίπεδο προβολής ορίζεται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και τα μοναδιαία διανύσματα  $\hat{x}_c$  και  $\hat{y}_c$ . Η τελευταία αυτή παραδοχή φαίνεται ασύμβατη με το σχήμα 5.2, καθώς εκεί φαίνεται ότι το κέντρο προβολής απέχει κατά  $w$  από το επίπεδο προβολής. Ωστόσο αυτή η ασυμβατότητα προς το αληθινό μοντέλο γεωμετρικής οπτικής δεν θα προκαλέσει σφάλματα στον υπολογισμό των συντεταγμένων των προβολών καθώς η επίδραση του  $w$  θα ληφθεί υπόψη μέσω της εφαρμογής της εξίσωσης (5.2). Επιπλέον και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να υποθεθεί ότι τα μήκη των μοναδιαίων διανυσμάτων επιλέγονται έτσι ώστε  $w = 1$ .

Αν  $\mathbf{p} = [x_p, y_p, z_p, 1]^T$  είναι οι ομογενείς συντεταγμένες ενός σημείου ως προς το προαναφερθέν σύστημα συντεταγμένων της κάμερας, τότε οι ομογενείς συντεταγμένες της προοπτικής προβολής του  $\mathbf{q} = [x_q, y_q, z_q, 1]^T$ , σύμφωνα με την εξίσωση (5.2) και την παραδοχή (3) θα είναι

$$x_q = \frac{wx_p}{z_p}, \quad y_q = \frac{wy_p}{z_p}, \quad z_q = 0$$

Αξίζει να διευκρινιστεί ότι χωρίς την παραδοχή (3) θα ίσχυε  $z_q = w$  (γνωστό και σταθερό) αλλά έτσι κι αλλιώς αυτό που ενδιαφέρει κατά τον υπολογισμό της προβολής είναι οι συντεταγμένες  $x_q, y_q$  πάνω στο διδιάστατο επίπεδο προβολής.

Η παραπάνω εξίσωση λαμβάνοντας υπόψη και την προαναφερθείσα κανονικοποίηση  $w = 1$  μπορεί να γραφεί τη χρήση πινάκων ως ακολούθως,

$$d \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Η μεταβλητή  $d$  ενσωματώνει την επίδραση του βάθους και πρακτικά ισούται με  $z_p$ .

### 5.2.2 Ορθογραφική προβολή

Με βάση την εισαγωγική ανάλυση ο αντίστοιχος μετασχηματισμός για την ορθογραφική προβολή δίνεται από την εξίσωση,

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

όπου έχει γίνει η απλούστευση  $s = \frac{w}{z_p} \approx$  σταθερό και μάλιστα  $s = 1$  σύμφωνα με την εισαγωγική ανάλυση.

### 5.3 Μετασχηματισμοί θέασης

Στις προηγούμενες ενότητες οι μετασχηματισμοί (προοπτικής και ορθογραφικής) προβολής διατυπώθηκαν ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $\hat{x}_c, \hat{y}_c, \hat{z}_c$  της κάμερας. Ωστόσο το πιο συνηθισμένο σενάριο χρήση αυτών των μετασχηματισμών απαιτεί τη διδιάστατη απεικόνιση του τρισδιάστατου κόσμου με δεδομένα :

1. Τις συντεταγμένες των σημείων ως προς το WCS.
2. Τη θέση της κάμερας μέσα στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.
3. Το περιορισμένο οπτικό πεδίο της κάμερας.

Δημιουργείται έτσι η ανάγκη (α) να περιγραφεί με αυστηρό μαθηματικά τρόπο η πληροφορία της θέσης της κάμερας, (β) να μετασχηματιστούν οι συντεταγμένες των σημείων από το WCS στο σύστημα συντεταγμένων της κάμερας προκειμένου να εφαρμοστούν οι εξισώσεις (5.4) ή (5.5) και (γ) για λόγους υπολογιστικής διευκόλυνσης να προσδιοριστούν εκείνα τα σημεία που είναι ορατά από την κάμερα (ανήκουν δηλαδή στο περιορισμένο οπτικό της πεδίο).

Κάθε ένα από τα προβλήματα (α)-(γ) αντιμετωπίζεται χωριστά στις επόμενες υποενότητες.

Το τελικό αποτέλεσμα της όλης διαδικασίας είναι ένας αλγόριθμος υπολογισμού μίας διδιάστατης εικόνας του τρισδιάστατου κόσμου.

#### 5.3.1 Προσδιορισμός της θέσης μίας εικονικής κάμερας

Η θέση της εικονικής κάμερας σε σχέση με το WCS προσδιορίζεται μονοσήμαντα αν είναι γνωστές οι συντεταγμένες (α) του κέντρου προβολής  $C$  και (β) των μοναδιαίων διανυσμάτων  $\hat{x}_c, \hat{y}_c, \hat{z}_c$  ως προς το WCS. Στην πράξη ο προσδιορισμός των συντεταγμένων του μέρους (β) είναι σχετικά άκομπος και αντί για αυτόν προτιμάται ένας εναλλακτικός τρόπος καθορισμού της κατεύθυνσης της κάμερας.

Συγκεκριμένα, πέραν του σημείου  $C$  προσδιορίζονται :

1. Ένα δεύτερο σημείο  $K$  του τρισδιάστατου κόσμου προς το οποίο στοχεύει η κάμερα. Το σημείο αυτό οφείλει να προβάλλεται πάνω στο σημείο  $C$ , δηλαδή στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων της κάμερας. Συνεπώς η ευθεία  $CK$  είναι ο άξονας του φακού.
2. Ένα μοναδιαίο διάνυσμα  $u$  του οποίου η προβολή στο επίπεδο της κάμερας είναι παράλληλη προς το  $\hat{y}_c$ . Το διάνυσμα αυτό, αποκαλούμενο και προς τα πάνω διάνυσμα, ορίζει την όρθια

θέση της κάμερας. Γενικά πάντως δεν απαιτείται το  $\mathbf{u}$  να είναι παράλληλο προς το επίπεδο προβολής.

Ο προσδιορισμός των  $K$  και  $\mathbf{u}$  είναι μία πολύ φυσική διαδικασία ανάλογη αυτής που χρησιμοποιεί ένας φωτογράφος για να τοποθετήσει την φωτογραφική του μηχανή.

Αυτό που απαιτείται στη συνέχεια από μαθηματικής άποψης είναι ο υπολογισμός των  $\hat{\mathbf{x}}_c, \hat{\mathbf{y}}_c, \hat{\mathbf{z}}_c$  με βάση τις συντεταγμένες των  $\mathbf{u}, K$  και  $C$ .

Καταρχήν αφού η ευθεία  $CK$  είναι ο άξονας του φακού ισχύει ότι

$$\hat{\mathbf{z}}_c = \frac{\overrightarrow{CK}}{|CK|}. \quad (5.6)$$

Αν από το διάνυσμα  $\mathbf{u}$  αφαιρεθεί η προβολή του πάνω στο  $\hat{\mathbf{z}}_c$  προκύπτει διάνυσμα  $\mathbf{t} = \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{z}}_c \rangle \hat{\mathbf{z}}_c$  παράλληλο προς το  $\hat{\mathbf{y}}_c$ , συνεπώς,

$$\hat{\mathbf{y}}_c = \frac{\mathbf{t}}{|\mathbf{t}|}, \quad \mathbf{t} \equiv \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{z}}_c \rangle \hat{\mathbf{z}}_c. \quad (5.7)$$

Τέλος το τρίτο μοναδιαίο διάνυσμα υπολογίζεται ως το εξωτερικό γινόμενο των δύο άλλων,

$$\hat{\mathbf{x}}_c = \hat{\mathbf{z}}_c \times \hat{\mathbf{y}}_c. \quad (5.8)$$

### 5.3.2 Από το WCS στο σύστημα συντεταγμένων της κάμερας

Η αλλαγή συντεταγμένων των σημείων του χώρου από το WCS με μοναδιαία διανύσματα

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

και αρχή

$$\mathbf{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

στο σύστημα συντεταγμένων της κάμερας με μοναδιαία διανύσματα  $\hat{\mathbf{x}}_c, \hat{\mathbf{y}}_c, \hat{\mathbf{z}}_c$  και αρχή  $C$  πραγματοποιείται μέσω μίας περιστροφής (με πίνακα περιστροφής  $\mathbf{R}$ ) και μίας μετατόπισης (κατά διάνυσμα μετατόπισης  $\mathbf{d}$ ). Η μεν περιστροφή στοιχίζει το  $\hat{\mathbf{x}}$  με το  $\hat{\mathbf{x}}_c$ , το  $\hat{\mathbf{y}}$  με το  $\hat{\mathbf{y}}_c$  και το  $\hat{\mathbf{z}}$  με το  $\hat{\mathbf{z}}_c$ , η δε μετατόπιση μεταφέρει το  $\mathbf{o}$  στο  $C$ .

Όσον αφορά στη περιστροφή ισχύει ότι,

$$\hat{\mathbf{x}}_c = \mathbf{R}\hat{\mathbf{x}}, \quad \hat{\mathbf{y}}_c = \mathbf{R}\hat{\mathbf{y}}, \quad \hat{\mathbf{z}}_c = \mathbf{R}\hat{\mathbf{z}},$$

ή ισοδύναμα

$$[\hat{\mathbf{x}}_c \ \hat{\mathbf{y}}_c \ \hat{\mathbf{z}}_c] = \mathbf{R} [\hat{\mathbf{x}} \ \hat{\mathbf{y}} \ \hat{\mathbf{z}}],$$

οπότε

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= [\hat{\mathbf{x}}_c \hat{\mathbf{y}}_c \hat{\mathbf{z}}_c] [\hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{z}}]^{-1} \\ &= [\hat{\mathbf{x}}_c \hat{\mathbf{y}}_c \hat{\mathbf{z}}_c] [\hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{z}}]^T.\end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη γραμμή χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα  $[\hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{z}}]^T [\hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{z}}] = \mathbf{I}_{3 \times 3}$  που ισχύει λόγω της ορθογωνιότητας των μοναδιαίων διανυσμάτων μεταξύ τους και συνεπάγεται ότι  $[\hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{z}}]^{-1} = [\hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{z}}]^T$ . Τέλος από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι,

$$\mathbf{R} = [\hat{\mathbf{x}}_c \hat{\mathbf{y}}_c \hat{\mathbf{z}}_c] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}^T \\ \hat{\mathbf{y}}^T \\ \hat{\mathbf{z}}^T \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{x}}_c \hat{\mathbf{x}}^T + \hat{\mathbf{y}}_c \hat{\mathbf{y}}^T + \hat{\mathbf{z}}_c \hat{\mathbf{z}}^T = [\hat{\mathbf{x}}_c \hat{\mathbf{y}}_c \hat{\mathbf{z}}_c], \quad (5.11)$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση (5.9).

Όσον αφορά στη μετατόπιση ισχύει ότι,

$$\mathbf{C} = \mathbf{o} + \mathbf{d} \Rightarrow \mathbf{d} = \mathbf{C} - \mathbf{o} = \mathbf{C}, \quad (5.12)$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση (5.10).

Έχοντας δεδομένο τον πίνακα  $\mathbf{R}$  και το διάνυσμα  $\mathbf{d}$ , αν ένα σημείο του χώρου  $\mathcal{A}^{3D}$  έχει ομογενείς συντεταγμένες  $[x, y, z, 1]$  οι συντεταγμένες του ως προς το σύστημα της κάμερας θα είναι,

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{d} \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

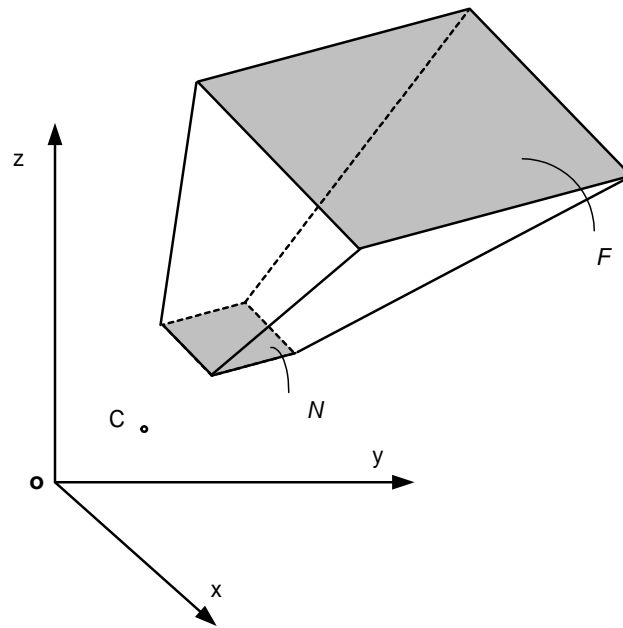
σύμφωνα με την εξίσωση (4.28) της Πρότασης 4.4 και χρήση της ιδιότητας  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$  που ισχύει για κάθε πίνακα περιστροφής.

### 5.3.3 Το οπτικό πεδίο της κάμερας

Οι υπολογισμοί των δύο προηγούμενων υποενοτήτων παρέχουν τη δυνατότητα εντοπισμού της προβολής οποιουδήποτε σημείου του τρισδιάστατου κόσμου πάνω στο επίπεδο της κάμερας  $P$  (βλ. Σχήμα 5.3). Υπενθυμίζεται ότι για λόγους μαθηματικής ευκολίας αυτό το επίπεδο προβολής τοποθετήθηκε μπροστά από το κέντρο προβολής  $C$  και σε απόσταση  $w$  από αυτό αντί της φυσιολογικής του θέσης που είναι η ακριβώς συμμετρική ως προς το  $C$ . (βλ. συζήτηση για το πώς το μοντέλο του Σχήματος 5.1 απλουσεύθηκε στο μοντέλο του Σχήματος 5.2 στην Ενότητα 5.1).

Στην πράξη η διδιάστατη εικόνα που σχηματίζεται (προβάλεται) στην κάμερα αντιστοιχεί σε ένα πεπερασμένων διαστάσεων ορθογώνιο που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο  $P$ . Στο Σχήμα 5.3 αυτό





Σχήμα 5.4: Ο πεπερασμένος όγκος θέασης είναι μία κόλουρη πυραμίδα στην περίπτωση της προοπτικής προβολής.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις καταδεικνύουν ότι κατά τη διαδικασία παραγωγής της διδιάστατης απεικόνισης του τρισδιάστατου κόσμου οι υπολογισμοί των προηγούμενων υποενοτήτων μπορούν να περιοριστούν μόνο στα σημεία που ανήκουν στον προαναφερθέντα όγκο θέασης. Τούτο συνεπάγεται μία σημαντική μείωση του υπολογιστικού κόστους αλλά απαιτεί μία επιπλέον διαδικασία ελέγχου του αν ένα σημείο είναι εντός ή εκτός της αντίστοιχης κόλουρης πυραμίδας. Μία μεγάλη οικογένεια εναλλακτικών αλγορίθμων - υπό την ονομασία *three dimensional clipping algorithms* - έχουν προταθεί για τη λήψη της εν λόγω απόφασης.

## Κεφάλαιο 6

# Αποκοπή (clipping)

Στο Κεφάλαιο 5 μελετώντας την προβολή του τρισδιάστατου χώρου στο επίπεδο της κάμερας εξετάστηκε η διαδικασία προβολής μεμονωμένων σημείων και μόνο προς το τέλος του κεφαλαίου (στην Ενότητα 5.3.3) σκιαγραφήθηκε η ανάγκη αποκλεισμού από τη διαδικασία προβολής όσων σημείων δεν ανήκουν στον όγκο θέασης.

Συχνά, ωστόσο, αν και ένα σημείο (ευρισκόμενο εκτός του όγκου θέασης) πρέπει να αποκοπεί, η πληροφορία που αυτό περιέχει είναι απαραίτητη για τον προσδιορισμό της προβολής κάποιων άλλων σημείων που είναι ορατά. Τυπικό παράδειγμα αποτελούν τα σημεία τεθλασμένων γραμμών ή επιφανειών που ορίζονται μέσω των κορυφών τους (βλ. Ενότητα 7.1). Η απλούστερη περίπτωση που εντάσσεται σε αυτή την κατηγορία είναι αυτή ενός ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  το οποίο στο τρισδιάστατο χώρο προσδιορίζεται μέσω των δύο άκρων του  $A$  και  $B$ . Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι ένα τέτοιο τμήμα προβάλεται ακριβώς σε εκείνο το ευθύγραμμο τμήμα του επιπέδου προβολής που ορίζεται από τις προβολές των δύο άκρων  $A'$  και  $B'$  αντίστοιχα. Όμως ακόμη κι αν ένα ή και τα δύο άκρα  $A$  και  $B$  βρίσκονται εκτός του όγκου θέασης είναι πιθανόν κάποιο εσωτερικό (υπο-)τμήμα του  $AB$  να είναι εντός του οπτικού πεδίου της κάμερας και συνεπώς η προβολή του να πρέπει να υπολογιστεί. Ο προβληματισμός αυτός επεκτείνεται ασφαλώς και σε πολύγωνα (στην απλούστερη περίπτωση τρίγωνα) που είναι μερικώς ορατά.

Η διαδικασία προσδιορισμού του μέρους οποιουδήποτε αντικειμένου εμπίπτει στο οπτικό πεδίο της κάμερας ονομάζεται *αποκοπή (clipping)*. Πρακτικά, το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι ο προσδιορισμός μίας νέας τεθλασμένης γραμμής ή επιφάνειας (για την ακρίβεια των κορυφών της) που προσδιορίζει το σύνορο του μέρους του αντικειμένου που ανήκει στον όγκο θέασης.

Η διαδικασία αποκοπής μπορεί να υλοποιηθεί, εναλλακτικά, σε δύο διαφορετικές φάσεις του υπολογισμού των προβολών:

1. Πρίν από τους μετασχηματισμούς προβολής: Στην περίπτωση αυτή ελέγχεται εάν οι κορυφές που καθορίζουν τα αντικείμενα (συνήθως στοιχειώδη αντικείμενα όπως ευθύγραμμα τμήματα,



τρίγωνα, πολύγωνα) ανήκουν στον τρισδιάστατο όγκο θέασης. Αν διαπιστωθεί ότι ολόκληρο το αντικείμενο είναι εντός του συγκεκριμένου όγκου η διαδικασία της προβολής υλοποιείται όπως περιγράφεται στο Κεφάλαιο 5. Στην αντίθετη περίπτωση υπολογίζονται οι κορυφές της τομής του αρχικού αντικειμένου με τον όγκο θέασης. Πρέπει να σημειωθεί ότι το αντικείμενο «τομή» μπορεί να έχει διαφορετικό αριθμό κορυφών από το αρχικό και επίσης μπορεί να είναι μή-κυρτό ακόμη κι αν το αρχικό είναι κυρτό.

2. Μετά τους μετασχηματισμούς προβολής: Στην περίπτωση αυτή όλα τα σημεία της σκηνής προβάλλονται χωρίς να ελέγχεται αν ανήκουν ή όχι στον όγκο θέασης. Κατόπιν οι διδιάστατες προβολές των αντικειμένων ελέγχονται έναντι του ορθογωνίου παραθύρου με κορυφές  $LL$ ,  $LU$ ,  $RU$  και  $RL$ .

Το μειονέκτημα της πρώτης μεθοδολογίας είναι η αυξημένη πολυπλοκότητα υπολογισμών στον τρισδιάστατο χώρο. Μειονεκτήματα της δεύτερης προσέγγισης είναι ότι (α) δεν υλοποιείται η ιδέα της απόρριψης των πολύ μακρινών και των πολύ κοντινών σημείων (βλ. επίπεδα  $F$  και  $N$  της Ενότητας 5.3.3) και (β) η πολυπλοκότητα αυξάνει λόγω του άωφελου υπολογισμού των προβολών πλήθους σημείων τα οποία εκ των υστέρων μπορεί να απορριφθούν. Είναι προφανές ότι ένας συνδυασμός των δύο προσεγγίσεων μπορεί να έχει συνολικά καλύτερες επιδόσεις.

Στις δύο ενότητες που ακολουθούν παρουσιάζεται η μεθοδολογία της αποκοπής χωριστά για κάθε μία από τις παραπάνω προσεγγίσεις.

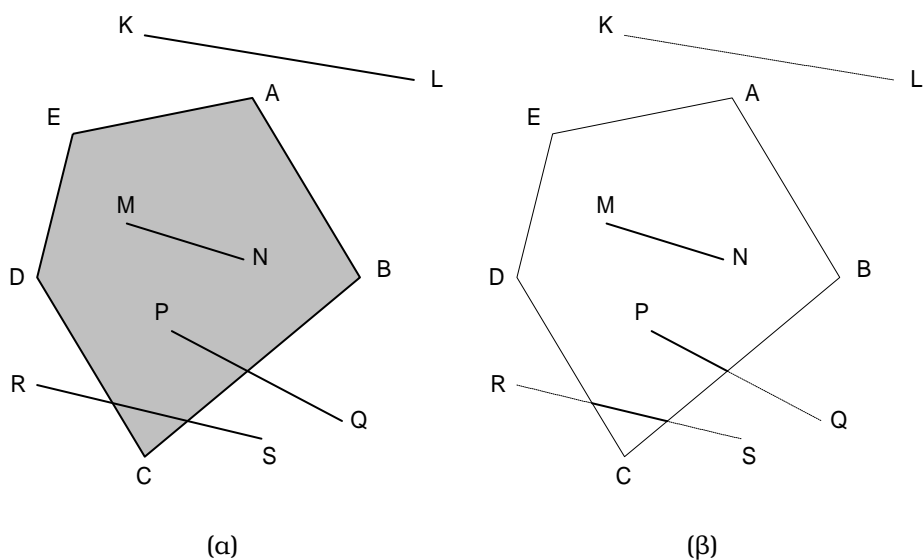
## 6.1 Αποκοπή από επίπεδα κυρτά πολύγωνα

Οποιαδήποτε τεθλασμένη γραμμή αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα και οποιαδήποτε κλειστή πολυγωνική περιοχή μπορεί να αποικοδομηθεί σε ένα σύνολο τριγωνικών μερών. Συνεπώς η διαδικασία αποκοπής επίπεδων (τεθλασμένων) σχημάτων από επίπεδα κυρτά πολύγωνα εύκολα ανάγεται στο πρόβλημα υπολογισμού της αποκοπής των στοιχειωδών ευθυγράμμων τμημάτων ή τριγώνων.

### 6.1.1 Αποκοπή ευθυγράμμων τμημάτων

Στο Σχήμα 6.1 παρουσιάζονται οι τέσσερις περιπτώσεις σεναρίων αποκοπής ευθύγραμμου τμήματος από οποιοδήποτε κυρτό πολύγωνο.

Κάθε μία από τις  $n$  ευθείες που ορίζονται από τις πλευρές ενός κυρτού  $n$ -γώνου διαιρεί το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα εκ των οποίων το ένα περιέχει ολόκληρο το πολύγωνο. Στο εξής το εν λόγω ημιεπίπεδο θα συμβολίζεται ως ημιεπίπεδο-0 της συγκεκριμένης ευθείας ενώ για το συμπληρωματικό του θα χρησιμοποιείται ο όρος ημιεπίπεδο-1. Κατά σύμβαση το ημιεπίπεδο-0



Σχήμα 6.1: (α) Οι δυνατές περιπτώσεις αποκοπής ευθύγραμμου τμήματος από κυρτό πολύγωνο: πλήρης αποκοπή ( $KL$ ), πλήρης αποδοχή ( $MN$ ), μερική αποκοπή του ενός άκρου ( $PQ$ ) ή και των δύο άκρων ( $RS$ ). (β) Το αποτέλεσμα της αποκοπής

περιέχει και τα σημεία της ευθείας ενώ το ημιεπίπεδο-1 είναι ανοιχτό. Από κοινού οι  $n$  ευθείες διαμερίζουν το επίπεδο σε χωρία (βλ. Σχήμα 6.2) τα οποία μπορεί να ταυτοποιηθούν (να λάβουν κωδικούς) από διαδικές λέξεις της μορφής  $w = b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0$  όπου

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{αν το χωρίο βρίσκεται στο ημιεπίπεδο-0 της ευθείας } i \\ 1 & \text{αν το χωρίο βρίσκεται στο ημιεπίπεδο-1 της ευθείας } i \end{cases} \quad (6.1)$$

Με βάση τα παραπάνω, οι  $n$  ευθείες διαμερίζουν το επίπεδο *το πολύ* σε  $2^n$  χωρία. Στη συνέχεια, κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχίζεται στον κωδικό του χωρίου που ανήκει. Με αναφορά στα παραπάνω, οι ακόλουθες παρατηρήσεις θα χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή ενός αλγόριθμου αποκοπής:

1. Τα σημεία τύπου  $00 \dots 00$  και μόνον αυτά είναι στο εσωτερικό του κυρτού πολυγώνου.
2. Το  $i$ -οστό bit του κώδικα δύο σημείων διαφέρει αν και μόνο αν βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας  $i$ .

Κατόπιν των παραπάνω παρατηρήσεων ο αλγόριθμος αποκοπής ενός τυχαίου ευθύγραμμου τμήματος  $PQ$  ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

**Βήμα 1ο:**

Υπολογίζονται οι κωδικοί  $p$  και  $q$  των άκρων του  $P$  και  $Q$  αντίστοιχα. Ο υπολογισμός απαιτεί τον έλεγχο της θέσης των σημείων ως προς κάθε μία από τις  $n$  ευθείες και χρήση της σχέσης (6.1). Στη γενική περίπτωση τα σημεία της ευθείας  $i$  έχουν συντεταγμένες  $(x, y)$  που ικανοποιούν τη σχέση

$$a_i x + \beta_i y + 1 = 0, \quad (6.2)$$

όπου οι σταθερές  $a_i, \beta_i$  υπολογίζονται από τις συντεταγμένες των κορυφών του πολυγώνου που ορίζουν τη συγκεκριμένη ευθεία. <sup>1</sup> Τα σημεία των δύο ημιεπιπέδων υπακούουν την ανισότητα  $a_i x + \beta_i y + 1 \gtrless 0$  με διαφορετική φορά. Η φορά της ανισότητας που αντιστοιχεί στο ημιεπίπεδο-0 είναι κατά περίπτωση αυτή που ικανοποιούν (όλες) οι υπόλοιπες κορυφές του πολυγώνου. Η ισότητα ανατίθεται και αυτή στο ημιεπίπεδο-0.

**Βήμα 2ο :**

Αν  $p = q = 00 \dots 00$  τότε και τα δύο άκρα βρίσκονται εντός του κυρτού πολυγώνου οπότε δεν χρειάζεται αποκοπή. Σε κάθε άλλη περίπτωση προχωράμε στο 3ο Βήμα.

**Βήμα 3ο :**

Υπολογίζεται η λογική έκφραση  $r = p \text{ XOR } q$ . Αν το  $i$ -οστό bit ( $r_i$ ) του  $r$  είναι 1 τότε το ευθύγραμμο τμήμα  $PQ$  τέμνεται από την ευθεία  $i$  σε κάποιο σημείο  $T_i$  το οποίο μάλιστα είναι διαφορετικό από τα  $P, Q$ .

**Βήμα 4ο :**

Για κάθε μία από τις τέμνουσες ευθείες που προσδιορίστηκαν στο 3ο Βήμα υπολογίζεται το αντίστοιχο σημείο τομής  $T_i$ . Τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος  $PQ$  ανήκουν σε ευθεία με εξίσωση

$$ax + \beta y + 1 = 0, \tag{6.3}$$

όπου οι σταθερές  $a, \beta$  υπολογίζονται από τις συντεταγμένες των άκρων  $P$  και  $Q$ . Το σύστημα των δύο γραμμικών εξισώσεων (6.2) και (6.3) καθορίζει τις συντεταγμένες του εκάστοτε σημείου τομής  $T_i$ .

**Βήμα 5ο :**

Το σύνολο των σημείων τομής  $T_i$  και επιπλέον τα δύο άκρα  $P$  και  $Q$  διατάσσονται ως προς τη μία συντεταγμένη τους και στη συνέχεια το αρχικό τμήμα  $PQ$  κατακερματίζεται σε επιμέρους τμήματα. Κάθε ένα από τα τμήματα αυτά είτε βρίσκεται ολόκληρο μέσα στο πολύγωνο είτε δεν το τέμνει καθόλου.

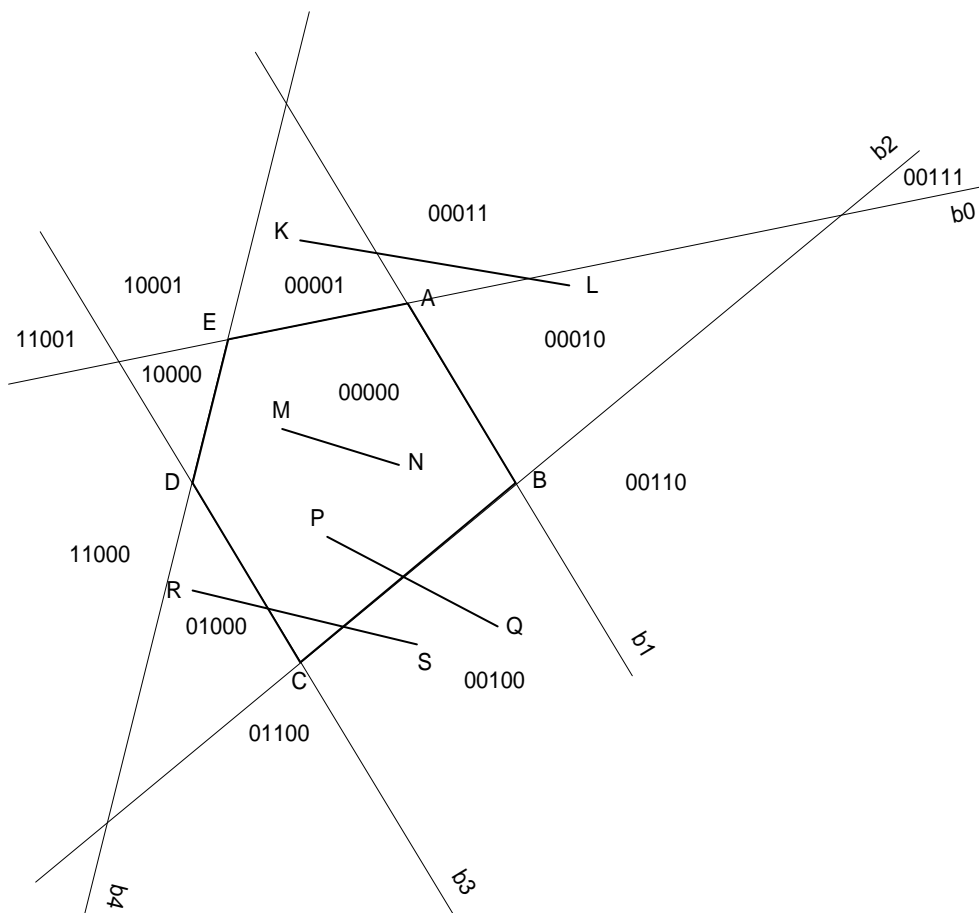
**Βήμα 6ο :**

Για κάθε ένα από τα επιμέρους τμήματα εκτελούνται τα Βήματα 1 και 2 του αλγορίθμου για να αποφασιστεί αν αυτά βρίσκονται (εξολοκλήρου) στο εσωτερικό του πολυγώνου ή όχι. Όσα από τα τμήματα δεν βρίσκονται στο εσωτερικό αποκόπτονται ολοκληρωτικά.

Η πιο χρήσιμη ειδική περίπτωση του παραπάνω αλγορίθμου αφορά την αποκοπή ευθυγράμμων τμημάτων από *ορθογώνια παραλληλόγραμμα* με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες του επιπέδου. Στην περίπτωση αυτή τα Βήματα 1 και 4 του αλγορίθμου απλουστεύονται καθότι

---

<sup>1</sup> Αν η ευθεία ορίζεται από τις κορυφές  $A = (x_A, y_A)$  και  $B = (x_B, y_B)$  τότε 
$$\begin{bmatrix} a_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 6.2: Οι  $n$  ευθείες των πλευρών ενός κυρτού  $n$ -γώνου διαμερίζουν το επίπεδο σε  $2^n$  (το πολύ) περιοχές.

οι τέσσερις ευθείες που ορίζονται περιγράφονται (με αναφορά στο Σχήμα 6.3) από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \text{Ευθεία } i = 0 : y &= y_{max} = y_{AB} \\ \text{Ευθεία } i = 1 : x &= x_{max} = x_{BC} \\ \text{Ευθεία } i = 2 : y &= y_{min} = y_{CD} \\ \text{Ευθεία } i = 3 : x &= x_{min} = x_{DA} \end{aligned} \tag{6.4}$$

Συνεπώς για το τυχαίο σημείο  $P$  του επιπέδου, με συντεταγμένες  $x_p, y_p$ , τα 4 bits της κωδικής λέξης του υπολογίζονται, στο Βήμα 1, από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} p_0 &= \text{logical}(y_p > y_{max}) \\ p_1 &= \text{logical}(x_p > x_{max}) \\ p_2 &= \text{logical}(y_p < y_{min}) \\ p_3 &= \text{logical}(x_p < x_{min}) \end{aligned} \tag{6.5}$$

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι στην περίπτωση αυτή, ορίζονται μόνο 9 χωρία ( $9 < 2^4$ ) με τους κωδικούς που φαίνονται στο Σχήμα 6.3.

Επιπλέον στο Βήμα 4, εφόσον χρειαστούν, οι πιθανές τομές της ευθείας που περιγράφεται από την (6.3) με τις τέσσερις παραπάνω ευθείες βρίσκονται με την (κατάλληλη κατά περίπτωση) αντικατάσταση των  $x, y$  με τις τιμές  $y_{max}, x_{max}, y_{min}, x_{min}$ .

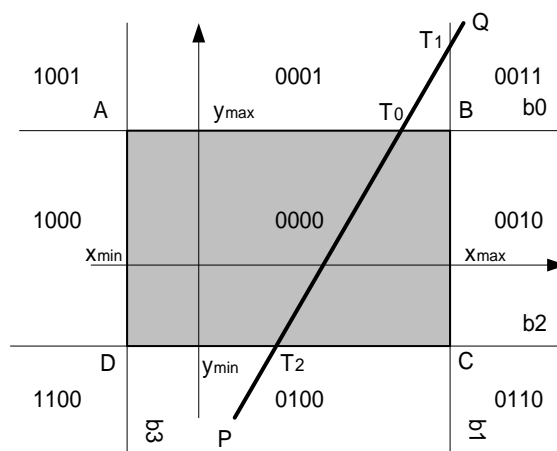
Η αποκοπή ευθυγράμμων τμημάτων από ορθογώνια παραλληλόγραμμα είναι άμεσα εφαρμόσιμη στην πρακτική περίπτωση *αποκοπής μετά τους μετασχηματισμούς προβολής* όπου τα σημεία  $A, B, C, D$  αντιστοιχούν κατά σειρά στις κορυφές  $LU, RU, RL, LL$  του ορθογώνιου οπτικού πεδίου της κάμερας.

### 6.1.2 Αποκοπή τριγώνων

(Η ΕΝΟΤΗΤΑ ΑΥΤΗ ΔΕΝ ΘΑ ΠΕΡΙΛΗΦΘΕΙ ΣΤΙΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2003.)

## 6.2 Αποκοπή από τρισδιάστατα κυρτά πολύεδρα

(Η ΕΝΟΤΗΤΑ ΑΥΤΗ ΔΕΝ ΘΑ ΠΕΡΙΛΗΦΘΕΙ ΣΤΙΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2003.)



Σχήμα 6.3: Αποκοπή του ευθύγραμμου τμήματος  $PQ$ , από το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $ABCD$ . Η εφαρμογή του αλγορίθμου οδηγεί στην κατάτμηση του  $PQ$  στα επιμέρους τμήματα  $PT_2$ ,  $T_2T_0$ ,  $T_0T_1$  και  $T_1Q$ . Από αυτά αποκόπτονται όλα πλην του  $T_2T_0$  που βρίσκεται εξολοκλήρου μέσα στο  $ABCD$

## Κεφάλαιο 7

# Αναπαράσταση καμπυλών και επιφανειών

Στα προηγούμενα κεφάλαια μελετήθηκε η έννοια του σημείου καθώς και οι μετασχηματισμοί των σημείων με την εμφανή παραδοχή ότι τα αντικείμενα του διδιάστατου ή τρισδιάστατου κόσμου προσδιορίζονται από ένα σύνολο σημείων. Δυστυχώς, το πλήθος των σημείων που περιγράφουν πλήρως ένα σχήμα ή ένα στερεό (για παράδειγμα, τα άπειρα σημεία της επιφάνειας ενός ακανόνιστου στερεού αντικειμένου) είναι άπειρο. Επομένως είναι λογικό να αναζητηθούν *συμπαγέστεροι* τρόποι προσδιορισμού τόσο των καμπυλών όσο και των επιφανειών μέσω ενός πεπερασμένου πλήθους σημείων. Ως αποτέλεσμα στη θεωρία των γραφικών επεκράτησαν δύο εναλλακτικές τεχνολογίες που έχουν τις ρίζες τους στην *προσεγγιστική αναπαράσταση συναρτήσεων* της κλασικής μαθηματικής ανάλυσης:

1. Την δειγματοληψία και γραμμική παρεμβολή. Σύμφωνα με αυτή την μεθοδολογία η αρχική καμπύλη ή επιφάνεια δειγματοληπείται με αποτέλεσμα τον εντοπισμό ενός αντιπροσωπευτικού *πλέγματος σημείων (mesh)* και στή συνέχεια οι μεν καμπύλες προσεγγίζονται από την τεθλασμένη που ορίζουν τα εν λόγω σημεία οι δε επιφάνειες από το πολύεδρο με κορυφές στις θέσεις των σημείων του πλέγματος.
2. Την κατά τμήματα (piece-wise approximation) προσέγγιση μέσω πολυωνύμων βάσης. Σε αυτή την κατηγορία μεθόδων η θέση κάθε τυχαίου σημείου  $p$  μίας καμπύλης ή επιφάνειας προσεγγίζεται από μία διανυσματική συνάρτηση  $P(t)$  παραμετροποιημένη ως προς τη μεταβλητή  $t$ . Η εν λόγω συνάρτηση παριστάνεται ως ανάπτυγμα σε ένα πεπερασμένο σύνολο συναρτήσεων βάσης. Ως συντελεστές του αναπτύγματος χρησιμοποιούνται ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων του αντίστοιχου χώρου (επίπεδο ή τρισδιάστατος χώρος) που αποκαλούνται *σημεία ελέγχου*.

Κάθε μία από τις δύο παραπάνω εναλλακτικές μεθοδολογίες έχει συγκεκριμένα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα με σημαντικότερα τα ακόλουθα :

1. Όσον αφορά στην προσέγγιση μέσω τεθλασμένης γραμμής ή πολυέδρου :

- (α') Έχει πολύ απλή διαισθητική ερμηνεία
- (β') Προκύπτει με φυσικό τρόπο κατά τη μοντελοποίηση φυσικών αντικειμένων βάσει μετρήσεων (π.χ., με τη χρήση ενός 3D scanner).
- (γ') Δεν επιδέχεται εύκολη αλλαγή στην πυκνότητα (λεπτομέρεια) των σημείων.
- (δ') Είναι ιδιαίτερα απαιτητική σε μνήμη όταν αυξάνει ο βαθμός λεπτομέρειας και συνεπώς το πλήθος των σημείων.
- (ε') Οποιοσδήποτε μετασχηματισμός (περιστροφή, μετατόπιση, κ.λπ.) του αντικειμένου απαιτεί υπολογισμούς για κάθε ένα από τα σημεία του πλέγματος.
- (ς') Η σχεδίαση ή τροποποίηση συνθετικών αντικειμένων είναι δυσχερής λόγω της απαίτησης χειρισμού της πληθώρας των σημείων του πλέγματος.

2. Όσον αφορά στην προσέγγιση μέσω αναπτύγματος σε συναρτήσεις βάσης :

- (α') Παρέχει ευχέρεια στη σχεδίαση συνθετικών μοντέλων χάρη στο σχετικά μικρό αριθμό σημείων ελέγχου που απαιτούνται για τον καθορισμό των αναπτυγμάτων.
- (β') Για το ίδιο λόγο οι μετασχηματισμοί είναι υπολογιστικά απλούστεροι καθώς αποδεικνύεται ότι ισοδυναμούν με τους μετασχηματισμούς των σχετικά ολιγάριθμων σημείων ελέγχου.
- (γ') Η απαιτούμενη μνήμη είναι επίσης μικρότερη.
- (δ') Επειδή η συνάρτηση  $P(t)$  είναι συνεχής είναι εύκολος ο υπολογισμός της θέσης ενός αυθαίρετα πυκνού πλήθους σημείων του αντικειμένου - όταν αυτό χρειαστεί - και συνεπώς εύκολη η διαδικασία αυξομείωσης της χρησιμοποιούμενης ανάλυσης.
- (ε') Δεν προκύπτει με φυσικό τρόπο κατά τη μοντελοποίηση φυσικών αντικειμένων βάσει μετρήσεων καθώς τα σημεία ελέγχου δεν είναι σημεία του αντικειμένου.

Οι δύο επόμενες ενότητες αναλύουν τις δύο προαναφερθείσες μεθοδολογίες με αυστηρότερο και λεπτομερέστερο τρόπο.



$\mathbf{p}_0$	$x_0, y_0, z_0$
$\mathbf{p}_1$	$x_1, y_1, z_1$
$\dots$	
$\mathbf{p}_{N-1}$	$x_{N-1}, y_{N-1}, z_{N-1}$

Πίνακας 7.1: Πίνακας Κορυφών (ΠΚ) για 3Δ γραμμές.

$E_0$	$\mathbf{p}_{i_0}, \mathbf{p}_{j_0}$
$E_1$	$\mathbf{p}_{i_1}, \mathbf{p}_{j_1}$
$\dots$	
$E_{K-1}$	$\mathbf{p}_{i_{K-1}}, \mathbf{p}_{j_{K-1}}$

Πίνακας 7.2: Πίνακας Ευθυγράμμων Τμημάτων (ΠΤ).

## 7.1 Προσέγγιση μέσω τεθλασμένης γραμμής ή πολυέδρου

### 7.1.1 Προσέγγιση καμπύλης γραμμής

Έστω  $\mathbf{p}_i$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$  σημεία του τρισδιάστατου ή διδιάστατου χώρου που βρίσκονται κατανομημένα *διαδοχικά* πάνω στην προσεγγιζόμενη καμπύλη γραμμή. Τότε η καμπύλη προσεγγίζεται από την τεθλασμένη  $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_{N-1}$  και για την αναπαράστασή της χρησιμοποιούνται ο πίνακας σημείων (ΠΚ) (βλ. πίνακα 7.1) και ο πίνακας ευθυγράμμων τμημάτων (ΠΤ) (βλ. πίνακα 7.2).

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα  $E_k$ ,  $k = 0, \dots, K - 1$  ( $K = N - 1$ ), του πίνακα ΠΤ ορίζεται από δύο σημεία του ΠΚ. Στην περίπτωση *συνεκτικών καμπυλών* οι σειρές του ΠΤ μπορούν να διαταχθούν έτσι ώστε να αντιστοιχούν σε διαδοχικά τμήματα της τεθλασμένης γραμμής οπότε το δεύτερο σημείο κάθε σειράς ταυτίζεται με το πρώτο της επόμενης. Επίσης, με την ίδια παραδοχή, αν η καμπύλη είναι κλειστή  $\mathbf{p}_{j_{N-2}} \equiv \mathbf{p}_{i_0}$ .

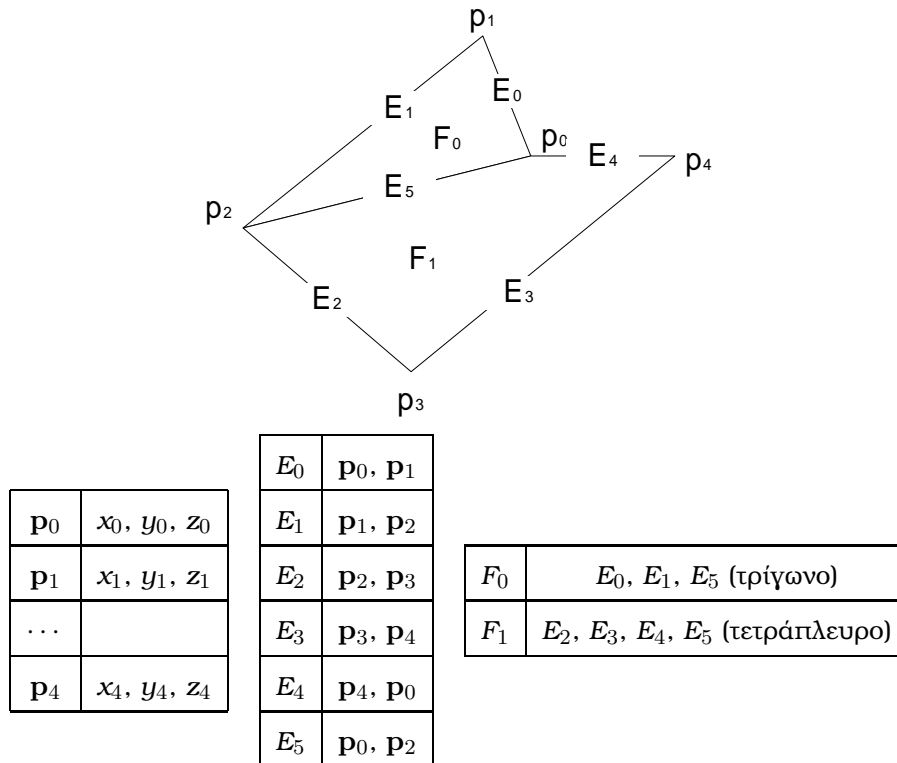
### 7.1.2 Προσέγγιση επιφάνειας

Έστω  $\mathbf{p}_i$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$  σημεία του τρισδιάστατου χώρου που βρίσκονται κατανομημένα πάνω στην προσεγγιζόμενη επιφάνεια. Τότε η επιφάνεια προσεγγίζεται από πολυεδρική επιφάνεια (άνοικτη ή κλειστή) αποτελούμενη από ένα σύνολο ανά ζεύγη εφαπτόμενων επίπεδων πολυγώνων  $F_l$ ,  $l = 0, \dots, L - 1$ . Κάθε πολύγωνο καθορίζεται από ένα πλήθος ακμών επιλεγμένων από το γενικό σύνολο των ακμών  $E_k$ ,  $k = 0, \dots, K - 1$  και κάθε ακμή προσδιορίζεται από ένα ζεύγος σημείων επιλεγμένων από το γενικό σύνολο σημείων του πλέγματος  $\mathbf{p}_n$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$ .

Επομένως για την πολυεδρική αναπαράσταση της επιφάνειας απαιτούνται οι ακόλουθοι τρεις

$F_0$	$E_{i_{1,0}}, E_{i_{2,0}}, E_{i_{3,0}}$ (τρίγωνο)
$F_1$	$E_{i_{1,1}}, E_{i_{2,1}}, E_{i_{3,1}}, E_{i_{4,1}}$ (τετράπλευρο)
...	
$F_{L-1}$	$E_{i_{1,L-1}}, E_{i_{2,L-1}}, E_{i_{3,L-1}}, E_{i_{4,L-1}}$ (τετράπλευρο)

Πίνακας 7.3: Ενδεικτικός Πίνακας Πολυγώνων (ΠΠ).



Σχήμα 7.1: Επιφάνεια αποτελούμενη από δύο πολύγωνα, ένα τρίγωνο  $F_1$  και ένα τετράπλευρο  $F_2$  και οι αντίστοιχοι πίνακες ΠΚ, ΠΑ και ΠΠ.

πίνακες (ή οτιδήποτε ισοδύναμο με αυτούς): (1) ο πίνακας κορυφών (ΠΚ) (αντίστοιχος του πίνακα 7.1 που ορίσθηκε για τις γραμμές), (2) ο πίνακας ακμών (ΠΑ) (αντίστοιχος του ΠΤ, βλ. πίνακα 7.2) και (3) ο πίνακας πολυγώνων (ΠΠ)(βλ. πίνακα 7.3).

## 7.2 Προσέγγιση μέσω αναπτύγματος σε συναρτήσεις βάσης

Όπως έχει ήδη αναφερθεί οι μέθοδοι προσέγγισης καμπυλών και επιφανειών με τη χρήση συναρτήσεων βάσης αναπαριστούν τα σημεία της της γραμμής ή της επιφάνειας μέσω μίας παραμετροποιημένης συνάρτησης  $\mathbf{P}(t)$  όπου η παράμετρος  $t$  λαμβάνει τιμές σε ένα κλειστό διάστημα. Για κάθε σημείο  $\mathbf{p}$  αντιστοιχεί μία τιμή της μεταβλητής  $t = t_p$  τέτοια ώστε  $\mathbf{p} = \mathbf{P}(t_p)$  και αντίστροφα κάθε τιμή της μεταβλητής εντός του κλειστού διαστήματος παράγει ένα σημείο της γραμμής ή της

επιφάνειας.

Η συνάρτηση  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  ορίζεται ως άθροισμα πεπερασμένου πλήθους συναρτήσεων βάσης,  $\phi_i(\mathbf{t})$ , με βάρη ένα πλήθος  $n + 1$  σημείων ελέγχου,  $\mathbf{p}_i$ , δηλαδή,

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i \phi_i(\mathbf{t}) \quad (7.1)$$

Σημειώνεται ότι η έκφραση (7.1) μπορεί να περιγράψει εξίσου καλά καμπύλες γραμμές και επιφάνειες ανάλογα με τη διάσταση της παραμέτρου  $\mathbf{t}$ . Συγκεκριμένα αν  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$  η (7.1) περιγράφει γραμμές ενώ αν  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$  η ίδια έκφραση περιγράφει επιφάνειες. Ειδικότερα για την περίπτωση των γραμμών τα σημεία-βάρη,  $\mathbf{p}_i$ , είναι σημεία του επιπέδου τότε και η  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  περιγράφει επίπεδες καμπύλες γραμμές ενώ αν τα  $\mathbf{p}_i$  είναι σημεία του τρισδιάστατου χώρου η  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  περιγράφει τρισδιάστατες γραμμές στον ίδιο χώρο.

Για την προσέγγιση γραμμών ( $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$ ) ως συναρτήσεις βάσης  $\phi_i(\mathbf{t})$  επιλέγονται πολυώνυμα της μεταβλητής  $\mathbf{t}$ . Αντίστοιχα για την προσέγγιση επιφανειών ( $\mathbf{t} = [t_1, t_2]^T \in \mathbb{R}^2$ ) χρησιμοποιούνται συνήθως διαχωρίσιμα πολυώνυμα των βαθμωτών μεταβλητών  $t_1, t_2$ , δηλαδή  $\phi_i(\mathbf{t}) = \phi_i^{(1)}(t_1)\phi_i^{(2)}(t_2)$ .

### 7.2.1 Πολυώνυμα Βάσης

Παρότι στην έκφραση (7.1) μπορούν να χρησιμοποιηθούν ποικίλα πολυώνυμα, δυο-τρεις οικογένειες έχουν επικρατήσει λόγω των ιδιοτήτων που προσδίδουν στη συνάρτηση  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ . Στη συνέχεια εξετάζονται οι δύο επικρατέστερες οικογένειες τέτοιων πολυωνύμων, τα πολυώνυμα Bernstein και τα πολυώνυμα B-splines για βαθμωτές εκδοχές της παραμέτρου  $\mathbf{t}$  ( $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$ ).

#### Πολυώνυμα Bernstein βαθμού $n$

Τα πολυώνυμα αυτά ορίζονται στο διάστημα  $t \in [0, 1)$  ως εξής:

$$\phi_{k,n}^{BE}(t) = \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n \quad (7.2)$$

Όπως υποδηλώνει η (7.2) ορίζονται  $n + 1$  πολυώνυμα Bernstein βαθμού  $n$ . Για παράδειγμα για  $n = 3$  ορίζονται τα ακόλουθα 4 πολυώνυμα:

$$\begin{aligned} \phi_{0,3}^{BE}(t) &= 1 - 3t + 3t^2 - t^3 \\ \phi_{1,3}^{BE}(t) &= 3t - 6t^2 + 3t^3 \\ \phi_{2,3}^{BE}(t) &= 3t^2 - 3t^3 \\ \phi_{3,3}^{BE}(t) &= t^3 \end{aligned}$$

## Πολυώνυμα B-Splines βαθμού $m$

Για τον ορισμό πλήθους  $n + 1$  πολυωνύμων B-splines βαθμού  $m^1$  απαιτείται η επιλογή  $n + m + 2$  διακριτών τιμών της μεταβλητής  $t$ , έστω  $t_0, t_1, \dots, t_{n+m+1}$ . Δεδομένων αυτών των διακριτών τιμών τα πολυώνυμα B-splines ορίζονται αναδρομικά ως ακολούθως:

$$\phi_{k,0}^{BS}(t) = \begin{cases} 1 & t_k \leq t < t_{k+1} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (7.3)$$

και

$$\phi_{k,m}^{BS}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+m} - t_k} \phi_{k,m-1}^{BS}(t) + \frac{t_{k+m+1} - t}{t_{k+m+1} - t_{k+1}} \phi_{k+1,m-1}^{BS}(t), \quad k = 0, \dots, n. \quad (7.4)$$

Είναι εύκολο να επαληθευθεί ότι

$$\phi_{k,m}^{BS}(t_k) = \phi_{k,m}^{BS}(t_{k+m+1}) = 0, \quad n \geq 1.$$

Για το λόγο αυτό οι τιμές  $t_k$  ονομάζονται *δεσμοί (knots)*.

Συχνά είναι χρήσιμο δύο ή περισσότεροι δεσμοί να ταυτίζονται. Σε αυτή την περίπτωση τα πηλίκα  $\frac{\phi_{k,m-1}^{BS}(t)}{t_{k+m} - t_k}$  και  $\frac{\phi_{k+1,m-1}^{BS}(t)}{t_{k+m+1} - t_{k+1}}$  στην έκφραση (7.4) αποκτούν τη μορφή  $\frac{0}{0}$ . Για την άρση αυτής της απροσδιοριστίας χρησιμοποιείται η σύμβαση  $\frac{0}{0} = 0$ .

Στο σημείο αυτό αξίζει να τονιστεί ότι ενώ το πλήθος των διαφορετικών πολυωνύμων Bernstein βαθμού  $m$  είναι ακριβώς  $m + 1$ , το πλήθος  $n + 1$  των διαφορετικών πολυωνύμων B-splines βαθμού  $m$  δεν εξαρτάται από το βαθμό αλλά από το αριθμό των δεσμών  $t_k$ ,  $k = 0, \dots, n + m + 1$  που χρησιμοποιούνται κατά τον ορισμό τους. Συνεπώς μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλο.

Ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον για την προσέγγιση καμπυλών και επιφανειών έχουν τα πολυώνυμα B-splines βαθμού  $m = 2$  (quadratic B-splines) και  $m = 3$  (cubic B-splines).

### 7.2.2 Προσέγγιση καμπύλης γραμμής (Bezier Curves)

Η μεθοδολογία Bezier για την προσέγγιση καμπυλών γραμμών συνίσταται στην επιλογή  $n + 1$  σημείων ελέγχου  $\mathbf{p}_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  και προσέγγιση της καμπύλης μέσω της παραμετρικής εξίσωσης (7.1). Ανάλογα με την επιλογή των πολυωνύμων βάσης η μέθοδος εξειδικεύεται σε *Προσέγγιση Bezier - Bernstein*, *Προσέγγιση Bezier - B-Splines*, κ.λπ.

#### Προσέγγιση Bezier - Bernstein

Στην προσέγγιση αυτή η έκφραση (7.1) εξειδικεύεται στην

---

<sup>1</sup>Για το βαθμό των πολυωνύμων B-Splines χρησιμοποιείται εδώ το σύμβολο  $m$  σε αναντιστοιχία με τα πολυώνυμα Bernstein που για το βαθμό τους χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο  $n$ . Ο λόγος, όπως θα διαφανεί στη συνέχεια, είναι ότι και στις δύο περιπτώσεις η ποσότητα  $n + 1$  αντιστοιχεί στο πλήθος των διαφορετικών πολυωνύμων που ορίζονται.

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i \phi_{i,n}^{BE}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (7.5)$$

όπου χρησιμοποιούνται τα πλήθους  $n + 1$  πολυώνυμα Bernstein βαθμού  $n$  της εξίσωσης (7.2).

Τα σημεία ελέγχου  $\mathbf{p}_i$  που χρησιμοποιούνται ως συντελεστές του γραμμικού συνδιασμού μπορεί να είναι είτε υπό τη μορφή συμβατικών είτε υπό τη μορφή ομογενών συντεταγμένων. Η μορφή της  $\mathbf{P}(t)$  θα είναι αντίστοιχη<sup>2</sup>.

*Βασικές ιδιότητες της προσέγγισης Bezier-Bernstein:*

1.  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{P}(0)$  και  $\mathbf{p}_n = \mathbf{P}(1)$
2. Τα ευθύγραμμα τμήματα  $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$  και  $\mathbf{p}_{n-1}\mathbf{p}_n$  εφάπτονται στην καμπύλη  $\mathbf{P}(t)$  στα σημεία  $\mathbf{p}_0$  και  $\mathbf{p}_n$  αντίστοιχα. Αναλυτικότερα, τα διανύσματα παραγώγων της  $\mathbf{P}(t)$  στα εν λόγω σημεία υπακούουν στις σχέσεις  $\dot{\mathbf{P}}(0) = n\overrightarrow{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}$  και  $\dot{\mathbf{P}}(1) = n\overrightarrow{\mathbf{p}_{n-1}\mathbf{p}_n}$ .
3. Ολόκληρη η καμπύλη περιέχεται στο κυρτό περίβλημα (convex hull) των σημείων ελέγχου  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ .
4. Δύο καμπύλες Bezier-Bernstein,  $\mathbf{P}(t)$  και  $\mathbf{P}'(t)$  μπορούν να συνδεθούν χωρίς να εμφανίζεται σημείο θλάσης (συνεχής πρώτη παράγωγος) αρκεί  $\mathbf{p}'_0 = \mathbf{p}_n$  και  $\mathbf{p}_{n-1}\mathbf{p}_n$  παράλληλο του  $\mathbf{p}'_0\mathbf{p}'_1$ .

*Συνήθως κατά την προσέγγιση Bezier - Bernstein οι καμπύλες γραμμές προσεγγίζονται κατά τμήματα που το καθένα ελέγχεται από 4 σημεία ελέγχου ( $n = 3$ ).*

### Προσέγγιση Bezier - B-Splines

Στην προσέγγιση αυτή στην έκφραση (7.1) χρησιμοποιούνται  $n + 1$  πολυώνυμα B-splines βαθμού  $m$  (συνήθως  $m = 2$  ή  $m = 3$ ):

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i \phi_{i,m}^{BS}(t), \quad 0 \leq t \leq n - m + 1, \quad (7.6)$$

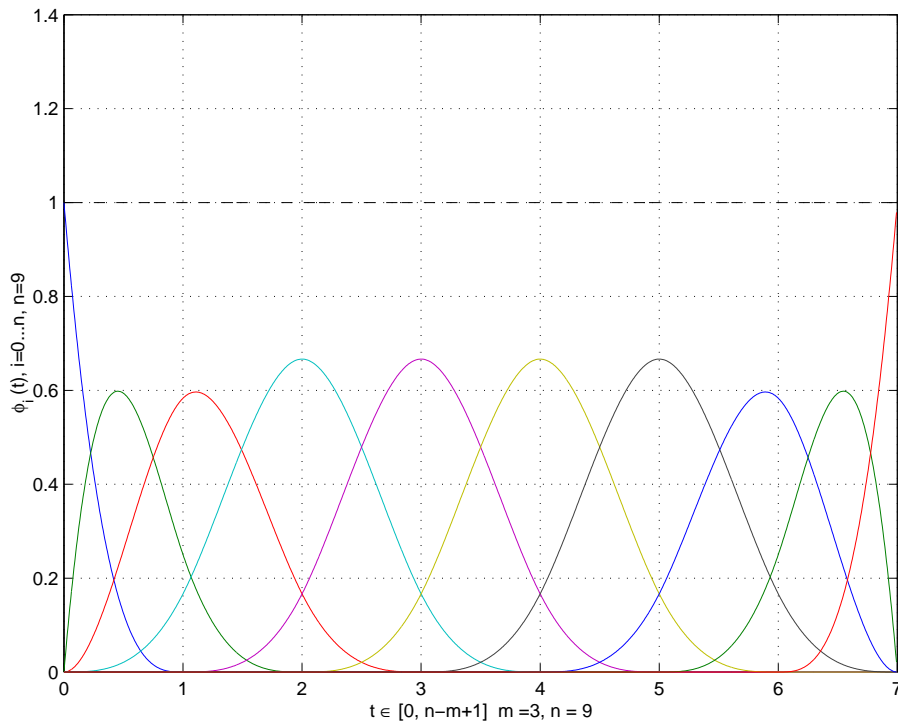
Για τη δημιουργία των πολυωνύμων βάσης τύπου B-splines επιλέγονται ως δεσμοί οι τιμές

$$[t_0, \dots, t_{n+m+1}] = [\underbrace{0, \dots, 0}_{m+1}, \underbrace{1, 2, \dots, n-m}_{n-m}, \underbrace{n-m+1, \dots, n-m+1}_{m+1}] \quad (7.7)$$

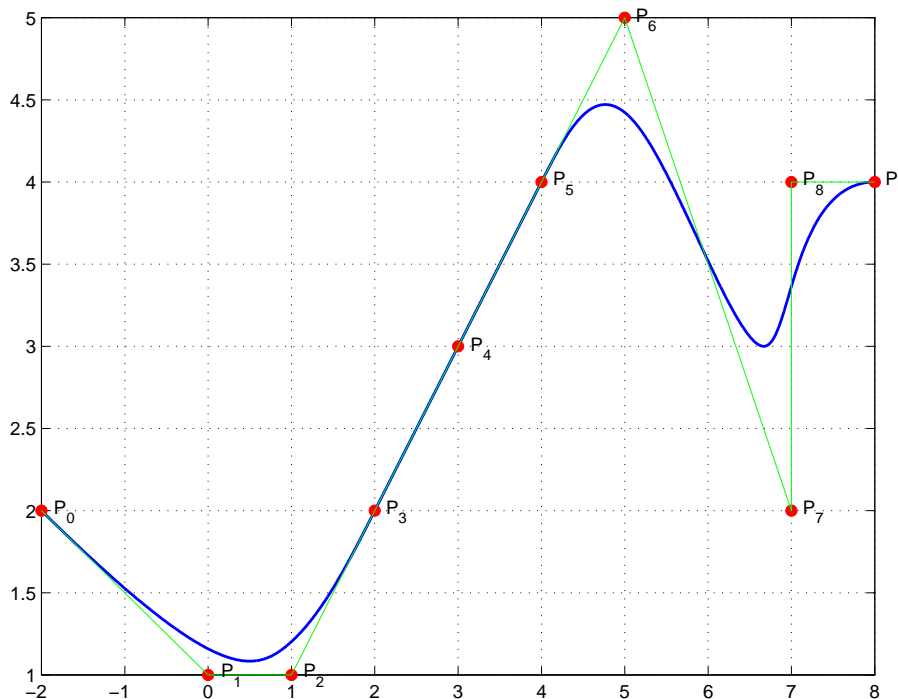
Τα σημεία ελέγχου  $\mathbf{p}_i$  που χρησιμοποιούνται ως συντελεστές του γραμμικού συνδιασμού μπορεί να είναι είτε υπό τη μορφή συμβατικών είτε υπό τη μορφή ομογενών συντεταγμένων. Η μορφή της  $\mathbf{P}(t)$  θα είναι αντίστοιχη<sup>3</sup>.

*Βασικές ιδιότητες της προσέγγισης Bezier - B-splines:*

<sup>2</sup>Για την περίπτωση των ομογενών συντεταγμένων, λόγω της ταυτότητας  $\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k} = 1$ , η τελευταία



Σχήμα 7.2: Τα πολυώνυμα B-splines  $\phi_{i,m}^{BS}(t)$  βαθμού  $m = 3$ , για προσέγγιση γραμμής με χρήση  $n + 1 = 10$  σημείων ελέγχου με δεσμούς  $[t_0, \dots, t_{n+m+1}] = [0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 7]$ .



Σχήμα 7.3: Προσέγγιση επίπεδης καμπύλης γραμμής με χρήση  $n + 1 = 10$  σημείων ελέγχου μέσω αναπτύγματος στα πολυώνυμα B-splines βαθμού  $m = 3$  του Σχήματος 7.2.

1. Ισχύουν οι ιδιότητες της προσέγγισης Bezier - Bernstein που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα.
2. Αν υπάρχουν  $m + 1$  (ή περισσότερα) συγγραμμικά σημεία ελέγχου ανάμεσά τους η καμπύλη γίνεται ευθεία. Για παράδειγμα, στην προσέγγιση του Σχήματος 7.3 το τμήμα μεταξύ των σημείων  $\mathbf{p}_3$  ως  $\mathbf{p}_5$  είναι ευθύγραμμο επειδή τα 5 ( $\geq m + 1 = 4$ ) σημεία ελέγχου  $\mathbf{p}_2$  ως  $\mathbf{p}_6$  είναι συγγραμμικά.
3. Αν αλλάξει η θέση ενός σημείου ελέγχου επηρεάζονται μόνο  $m + 1$  περιοχές της καμπύλης στη γειτονιά του σημείου.
4. Επιτρέπεται η χρήση σημείων ελέγχου με πολλαπλότητα μεγαλύτερη του 1 ( $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i+1} = \dots$ ). Το αποτέλεσμα είναι να έλκεται η καμπύλη πλησιέστερα προς τη θέση αυτών των σημείων σε σχέση με το να υπήρχε στην ίδια θέση ένα μόνο (απλό) σημείο ελέγχου.

### 7.2.3 Προσέγγιση επιφάνειας

Η προσέγγιση επιφανειών με τη χρήση συναρτήσεων βάσης είναι μια άμεση επέκταση των αντίστοιχων μεθόδων για καμπύλες γραμμές. Ως σημεία ελέγχου χρησιμοποιούνται σημεία του τρισδιάστατου χώρου τα οποία *διατάσσονται* στο λεγόμενο *οδηγό δίκτυο (guiding net)*:

$$\mathbf{p}_{ij} = \begin{cases} i = 0, \dots, m \\ j = 0, \dots, n \end{cases}$$

Η παράμετρος  $\mathbf{t}$  είναι διδιάστατη,

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix},$$

και συνήθως χρησιμοποιούνται διαχωρίσιμα πολυώνυμα των μεταβλητών  $t_1, t_2$ .

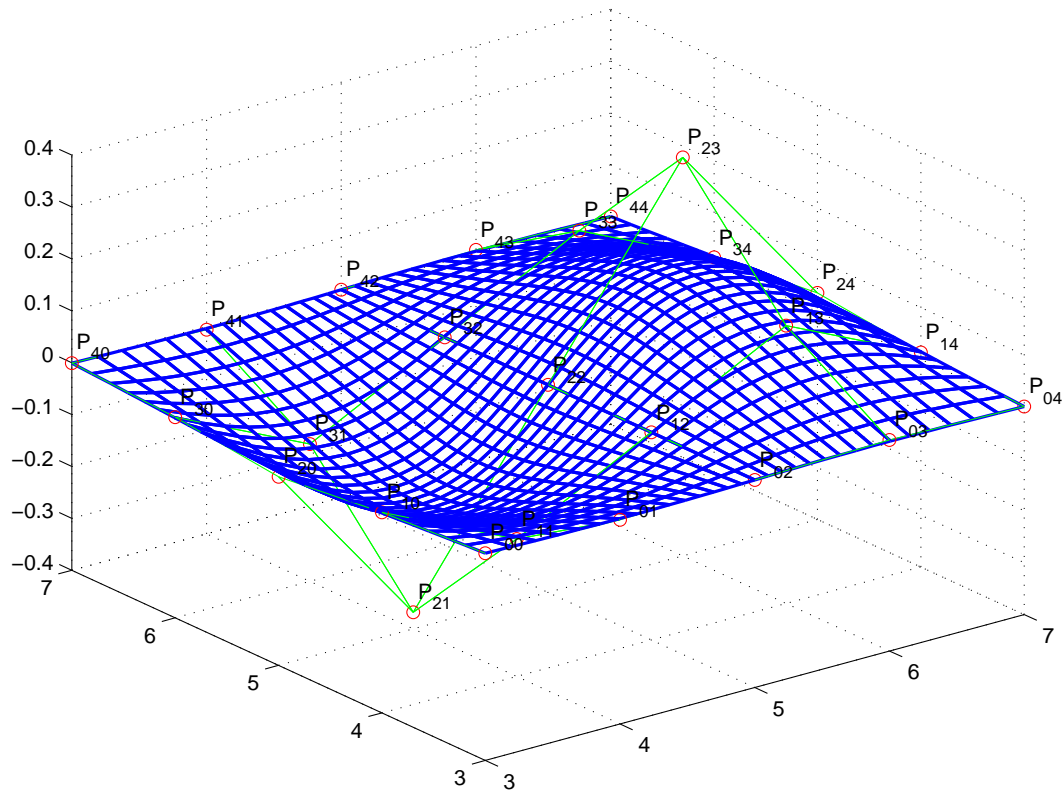
### Προσέγγιση Bezier - Bernstein

Η επιφάνεια προσεγγίζεται από τη συνάρτηση,

$$\mathbf{P}(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{p}_{ij} \phi_{i,m}^{BE}(t_1) \phi_{j,n}^{BE}(t_2), \quad 0 \leq t_1, t_2 \leq 1, \quad (7.8)$$

συνιστώσα του αποτελέσματος  $\mathbf{P}(t)$  θα είναι μονάδα όπως απαιτείται

<sup>3</sup>Για την περίπτωση των ομογενών συντεταγμένων, αποδεικνύεται πως, υπό προϋποθέσεις που ισχύουν στην πράξη,  $\sum_{i=0}^n \phi_{i,m}^{BS}(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq n - m + 1$  οπότε η τελευταία συνιστώσα του αποτελέσματος  $\mathbf{P}(t)$  θα είναι μονάδα όπως απαιτείται



Σχήμα 7.4: Προσέγγιση επιφάνειας με χρήση  $(m + 1) \times (n + 1) = 5 \times 5$  σημείων ελέγχου μέσω αναπτύγματος σε πολυώνυμα B-splines βαθμού  $k = l = 3$ . Τα σημεία ελέγχου παριστάνονται με κόκκινους κύκλους, το οδηγό πλέγμα με πράσινες γραμμές και η προσέγγιση της επιφάνειας με μπλέ.

### Προσέγγιση Bezier - B-splines

Η επιφάνεια προσεγγίζεται από τη συνάρτηση,

$$\mathbf{P}(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{ij} \phi_{i,k}^{BS}(t_1) \phi_{j,l}^{BS}(t_2), \quad 0 \leq t_1 \leq m - k + 1, \quad 0 \leq t_2 \leq n - l + 1, \quad (7.9)$$

Το σύνολο των δεσμών (knots) που χρησιμοποιείται ορίζεται αντίστοιχα προς τη μονοδιάστατη περίπτωση χωριστά για κάθε μία από τις μεταβλητές  $t_1$  και  $t_2$  (βλ. εξίσωση (7.7)).

Συνήθως χρησιμοποιούνται quadratic ( $k = l = 2$ ) ή cubic ( $k = l = 3$ ) πολυώνυμα τύπου B-splines.

Στο Σχήμα 7.4 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα με σημεία ελέγχου ισοκατανεμημένα ως προς τις συνιστώσες  $x, y$  στην περιοχή  $[-2, 2] \times [-2, 2]$  και με συνιστώσα  $z = (x - 5)e^{-((x-5)^2 + (y-5)^2)}$ .



### 7.3 Μετασχηματισμοί *affine* καμπύλων γραμμών και επιφανειών

Οι μετασχηματισμοί καμπύλων γραμμών και επιφανειών ανάγονται στους αντίστοιχους μετασχηματισμούς καθενός από τα σημεία τους.

Στην περίπτωση της αναπαράστασης με τη χρήση ευθυγράμμων τμημάτων ή πολυγώνων ο μετασχηματισμός υλοποιείται μέσω του αντίστοιχου μετασχηματισμού των κορυφών της τεθλασμένης γραμμής ή του πολυέδρου. Η διαδικασία συνεπώς ανάγεται στην παραγωγή ενός νέου Πίνακα Κορυφών (ΠΚ) ενώ οι υπόλοιποι πίνακες (ευθυγράμμων τμημάτων για τις γραμμές ή ακμών και πολυγώνων για τις επιφάνειες) δεν αλλάζουν.

Ένα σημαντικό μειονέκτημα της αναπαράστασης με τη χρήση ευθυγράμμων τμημάτων ή πολυγώνων είναι η αυξημένη υπολογιστική πολυπλοκότητα της υλοποίηση των μετασχηματισμών καθώς απαιτείται ο υπολογισμός να επαναληφθεί για το μεγάλο πλήθος κορυφών.

Στην περίπτωση της αναπαράστασης με τη χρήση αναπτύγματος σε συναρτήσεις βάσης αποδεικνύεται ότι το μόνο που απαιτείται είναι ο μετασχηματισμός των σημείων ελέγχου. Πράγματι αν  $\mathbf{L}_h$  είναι ο πίνακας του μετασχηματισμού *affine* και τα σημεία έχουν εκφραστεί σε ομογενείς συντεταγμένες, κάθε σημείο της καμπύλης/επιφάνειας  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  μετασχηματίζεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_h \mathbf{P}(\mathbf{t}) &= \mathbf{L}_h \sum_i \mathbf{p}_i \phi_i(\mathbf{t}) \\ &= \sum_i \mathbf{L}_h \mathbf{p}_i \phi_i(\mathbf{t}) \\ &= \sum_i \mathbf{q}_i \phi_i(\mathbf{t}),\end{aligned}\tag{7.10}$$

όπου  $\mathbf{q}_i \triangleq \mathbf{L}_h \mathbf{p}_i$ .

## Κεφάλαιο 8

# Φωτισμός (Illumination)

### 8.1 Βασικοί ορισμοί και παραδοχές

Με τον όρο *Φωτισμός* εννοούμε τη διαδικασία υπολογισμού της έντασης της φωτεινής ακτινοβολίας που προσλαμβάνει ο θεατής (π.χ. μία κάμερα) από ένα συγκεκριμένο σημείο αντικειμένου που βρίσκεται στο οπτικό του πεδίο. Η φωτεινή ακτινοβολία μπορεί να προέρχεται από ανάκλαση, διάχυση, διάθλαση, αυτοφωτισμό. Μεθοδολογικά οι μέθοδοι υπολογισμού του φωτισμού χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: (α) τις ευριστικές αλλά ελκυστικά απλές μεθόδους και (β) αυτές που προσομοιώνουν μοντέλα φυσικής οπτικής. Οι δεύτερες παρέχουν πολύ φυσικότερα αποτελέσματα με κόστος αρκετά μεγαλύτερη πολυπλοκότητα.

### 8.2 Απλά (ευριστικά) μοντέλα φωτισμού

#### 8.2.1 Αυτοφωτισμός

$$I_{\lambda} = k_{i\lambda} , \quad (8.1)$$

όπου  $I_{\lambda}$  η προσλαμβανόμενη φωτεινότητα σε μήκος κύματος  $\lambda$  λόγω του συντελεστή εσωτερικής φωτεινότητας  $k_{i\lambda}$ .

#### 8.2.2 Διάχυτο φως από το περιβάλλον (ambient light)

$$I_{\lambda} = I_{a\lambda} k_{a\lambda} , \quad (8.2)$$

όπου ο συντελεστής ανάκλασης διάχυτου φωτός,  $k_{a\lambda}$ , αποτελεί χαρακτηριστικό της ανακλαστικής επιφάνειας στην οποία ανήκει το μελετούμενο σημείο και  $I_{a\lambda}$  είναι η ένταση του διάχυτου φωτισμού

που επικρατεί στο χώρο που βρίσκεται η ίδια επιφάνεια. Το προσλαμβανόμενο διάχυτο φως δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό της επιφάνειας ούτε από τη γωνία θέασής της. Στις εικόνες του Σχήματος 8.5 εμφανίζονται τρία παραδείγματα αυτοφωτισμού μίας σφαιρικής επιφάνειας. Και στις τρεις περιπτώσεις υποθέτουμε λευκό διάχυτο φως έντασης  $I_a = 1.0$ . Ο συντελεστής ανάκλασης διάχυτου φωτός της σφαιρικής επιφάνειας,  $k_a$ , παίρνει τις τιμές 0.5, 0.7 και 0.9. Αξίζει να επισημανθεί, για την κατανόηση των τιμών των παραμέτρων, ότι αν ήταν  $I_a = 1.0$  και  $k_a = 1.0$  η σφαίρα θα αποκτούσε χρώμα απολύτως λευκό<sup>1</sup>.

### 8.2.3 Διάχυτη ανάκλαση (diffuse reflection - Lambertian reflection)

Ο φωτισμός του είδους αυτού προέρχεται από ανάκλαση φωτεινών ακτίνων προερχόμενων στην απλούστερη περίπτωση από σημειακή πηγή σε επιφάνεια που λόγω της τραχειάς υφής της διαχέει το φως προς όλες τις κατευθύνσεις σύμφωνα με το νόμο του Lambert. Ειδικότερα, σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, μία στοιχειώδης περιοχή  $dE$  περί το υπό εξέταση σημείο  $P$  ανακλά προς μία συγκεκριμένη κατεύθυνση, φωτεινή ισχύ,

$$I_\lambda \propto dE \cos b \quad (8.3)$$

όπου  $b$  η γωνία θέασης που σχηματίζεται μεταξύ του μοναδιαίου διανύσματος  $\hat{N}$  που είναι κάθετο στην επιφάνεια επί του σημείου  $P$  και του μοναδιαίου διανύσματος  $\hat{V}$  που δείχνει προς τον παρατηρητή. Αν εξετάσουμε όμως ένα στοιχειώδη κύλινδρο διατομής  $dA$  με κατεύθυνση από το σημείο  $P$  προς τον παρατηρητή, ισχύει ότι,

$$dE = \frac{dA}{\cos b}, \quad (8.4)$$

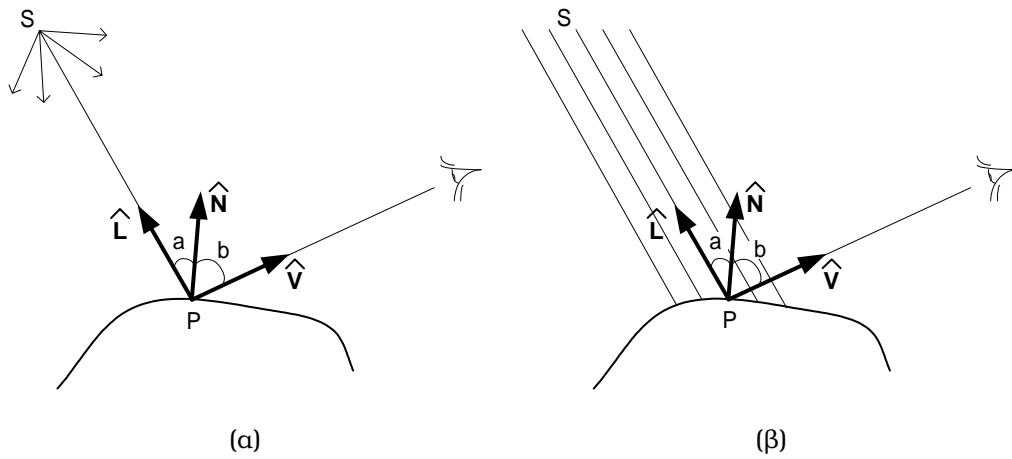
οπότε από το συνδυασμό των εξισώσεων (8.3) και (8.4) προκύπτει ότι η προσλαμβανόμενη από τον παρατηρητή φωτεινή ισχύς δεν εξαρτάται από τη γωνία θέασης  $b$  (βλ. Σχήμα 8.2).

Αντιθέτως, η προσλαμβανόμενη φωτεινότητα  $I_\lambda$  εξαρτάται μόνο από τη γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$  της ακτίνας στο εξεταζόμενο σημείο,  $P$ . Η γωνία  $\alpha$  ισούται με τη γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του μοναδιαίου διανύσματος  $\hat{L}$  που έχει κατεύθυνση παράλληλη προς την προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα και του μοναδιαίου διανύσματος  $\hat{N}$  (βλ. Σχήμα 8.1). Συγκεκριμένα,

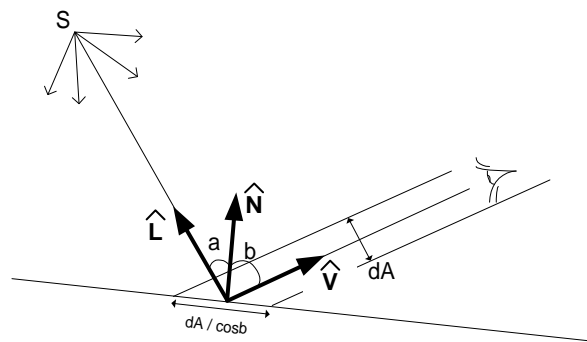
$$I_\lambda = I_{p\lambda} k_{d\lambda} \cos \alpha = I_{p\lambda} k_{d\lambda} (\hat{N} \cdot \hat{L}), \quad (8.5)$$

για  $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$  ή ισοδύναμα  $\cos \alpha = \hat{N} \cdot \hat{L} > 0$ . Στην εξ. (8.5),  $I_{p\lambda}$  είναι η ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας μήκους κήματος  $\lambda$  και  $k_{d\lambda} \in [0, 1]$  ο *συντελεστής διάχυτης ανάκλασης*

<sup>1</sup>Σε αυτό και σε όλα τα παραδείγματα που ακολουθούν το background θα έπρεπε να εμφανίζεται μαύρο αντί για λευκό καθώς δεν περιέχει ανακλαστικά στοιχεία. Παρουσιάζεται, ωστόσο, κατά παρέκκλιση λευκό για προφανείς οικολογικούς-οικονομικούς λόγους



Σχήμα 8.1: Ανάκλαση φωτός που προέρχεται από (α) σημειακή πηγή  $S$  και (β) από παράλληλη φωτεινή δέσμη (ισοδύναμη σημειακή πηγή σε άπειρη απόσταση).



Σχήμα 8.2: Η γωνία θέασης δεν επηρεάζει την προσλαμβανόμενη φωτεινότητα σύμφωνα με το μοντέλο διάχυσης του Lambert.

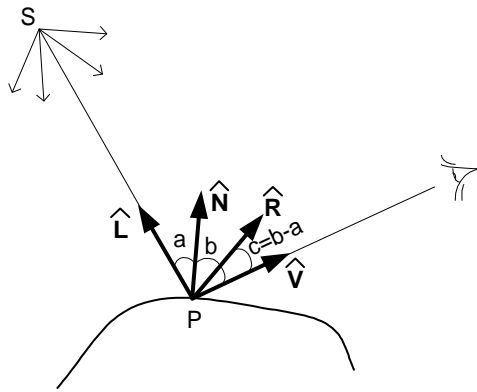
για το ίδιο μήκος κύματος. Η ένταση  $I_{p\lambda}$  χαρακτηρίζει την φωτεινή πηγή ενώ ο συντελεστής  $k_{d\lambda}$  την υφή της επιφάνειας στην οποία ανήκει το εξεταζόμενο σημείο  $P$ .

Για την περίπτωση σημειακών πηγών, το μοντέλο της εξ. (8.5) μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να λαμβάνει υπόψη την απόσταση της πηγής από το σημείο πρόσπτωσης:

$$I_{\lambda} = I_{p\lambda,0} f_{att} k_{d\lambda} (\hat{N} \cdot \hat{L}), \quad (8.6)$$

όπου ο συντελεστής εξασθένησης  $f_{att} = 1/d^2$  και  $d = |SP|$  η απόσταση της σημειακής πηγής  $S$  από το σημείο  $P$ . Με  $I_{p\lambda,0}$  συμβολίζεται η ένταση της φωτεινής πηγής σε απόσταση  $d = 1$ . Σε ορισμένες περιπτώσεις αντί της προηγούμενης έκφρασης, χρησιμοποιείται για το συντελεστή εξασθένησης η μορφή  $f_{att} = \min(\frac{1}{c_1 + c_2 d + c_3 d^2}, 1)$  όπου οι σταθερές  $c_1, c_2, c_3$  επιλέγονται ώστε να επιτυγχάνεται καλύτερο αισθητικό αποτέλεσμα ενώ λαμβάνεται μέριμνα ώστε  $0 \leq f_{att} \leq 1$ .

Ένα παράδειγμα της λειτουργίας του μοντέλου διάχυτης ανάκλασης παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.6. Σε σφαιρική επιφάνεια ακτίνας  $\rho = 1$  και κέντρο στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων, προσπίπτει λευκό φως έντασης  $I_{p,0} = 1$  προερχόμενο από σημειακή πηγή. Η σχετική θέση



Σχήμα 8.3: Σύμφωνα με το μοντέλο του Phong το σημείο  $P$  εκπέμπει φωτεινή ακτινοβολία ακόμη και προς γωνίες θέασης  $b$  που δεν ταυτίζονται με τη γωνία πρόσπτωσης  $a$ .

της σφαίρας, της πηγής και του παρατηρητή φαίνεται στο Σχήμα 8.4. Στα τρία παραδείγματα ο συντελεστής διάχυτης ανάκλασης,  $k_d$ , είχε αντίστοιχα τιμές .5, .7 και .9 και ήταν ανεξάρτητος του μήκους κύματος.

#### 8.2.4 Κατοπτρική ανάκλαση

Το μοντέλο αυτό προσεγγίζει το φωτισμό που παράγεται από την πρόσπτωση φωτός σε *γυαλιστερές* επιφάνειες.

Ιδανική περίπτωση γυαλιστερής επιφάνειας αποτελούν τα τέλεια κάτοπτρα για τα οποία η φωτεινή ακτινοβολία που φτάνει στον παρατηρητή από το σημείο  $P$  υπακούει στη σχέση:

$$I_{\lambda} = I_{p\lambda} k_{s\lambda} \delta(b - a) , \quad (8.7)$$

δηλαδή ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται φωτισμό μη-μηδενικής έντασης  $I_{p\lambda} k_{s\lambda}$  μόνο όταν η γωνία θέασης  $b$  ισούται με τη γωνία προσπτώσεως  $a$ . Ο συντελεστής κατοπτρικής ανάκλασης,  $k_{s\lambda}$ , αντιστοιχεί στο κλάσμα της ακτινοβολίας που ανακλάται από την επιφάνεια (για το συγκεκριμένο μήκος κύματος  $\lambda$ ).

Το μοντέλο του ιδανικού ανακλαστήρα της εξ. (8.7) γενικεύεται σε μη ιδανικούς ανακλαστήρες οι οποίοι επιτρέπουν τη διασπορά ανακλώμενης φωτεινής ακτινοβολίας και σε παράπλευρες γωνίες θέασης  $b \neq a$ :

$$I_{\lambda} = I_{p\lambda} k_{s\lambda} \cos(b - a)^n , \quad (8.8)$$

Το μοντέλο της εξ. (8.8) οφείλεται στον Phong. Η ακέραια σταθερά  $n$  καθορίζει το βαθμό διασποράς των ανακλώμενων ακτίνων. Όταν  $n \rightarrow \infty$  το μοντέλο της εξ. (8.8) τείνει σε αυτό της (8.7).

Με αναφορά στο σχήμα 8.3, αν  $\hat{R}$  είναι το διάνυσμα που περιγράφει την ευθεία της ιδανικής ανάκλασης (δηλ., το  $\hat{R}$  είναι συμμετρικό του  $\hat{L}$  ως προς το  $\hat{N}$ ), η γωνία  $b - a$  ισούται με τη γωνία

μεταξύ των  $\hat{R}$  και  $\hat{V}$ , οπότε  $\cos(b - a) = \hat{R} \cdot \hat{V}$ . Εύκολα μπορεί να ελεγχθεί ότι  $\hat{R} \cdot \hat{V} = (2\hat{N}(\hat{N} \cdot \hat{L}) - \hat{L}) \cdot \hat{V}$  οπότε η εξ. (8.8) γράφεται:

$$\begin{aligned} I_{\lambda} &= I_{p\lambda} k_{s\lambda} (\hat{R} \cdot \hat{V})^n \\ &= I_{p\lambda} k_{s\lambda} ((2\hat{N}(\hat{N} \cdot \hat{L}) - \hat{L}) \cdot \hat{V})^n, \end{aligned} \quad (8.9)$$

Στο Σχήμα 8.7(α-γ) παρουσιάζονται παραδείγματα της λειτουργίας του μοντέλου κατοπτρικής ανάκλασης. Χρησιμοποιείται η διάταξη αντικειμένου - πηγής - θεατή του Σχήματος 8.4. Κατά σειρά στα τρία παραδείγματα ο συντελεστής διάχυτης ανάκλασης,  $k_s$ , είχε τιμές .5, .7 και .9 και ήταν ανεξάρτητος του μήκους κύματος ενώ ο εκθέτης του Phong ήταν  $n = 3$ .

### 8.2.5 Το συνολικό μοντέλο φωτισμού

Συγκεντρώνοντας όρους από τα επιμέρους μοντέλα φωτισμού προκύπτει το ακόλουθο συνοπτικό μοντέλο:

$$I_{\lambda} = k_{i\lambda} + I_{a\lambda} k_{a\lambda} + \sum_{k=1}^N [I_{p\lambda,0}^k f_{att}^k [k_{d\lambda} (\hat{N} \cdot \hat{L}^k) + k_{s\lambda} (\hat{R}^k \cdot \hat{V})^n]] \quad (8.10)$$

στο οποίο έχουν συμπεριληφθεί  $N$  φωτεινές πηγές.

Η εξ. (8.10) αναφέρεται σε υπολογισμούς που αφορούν ένα συγκεκριμένο μήκος κύματος  $\lambda$ . Αν οι πηγές είναι πολυχρωματικές, ο συνολικός φωτισμός υπολογίζεται για το σύνολο των παρόντων μηκών κύματος ως:

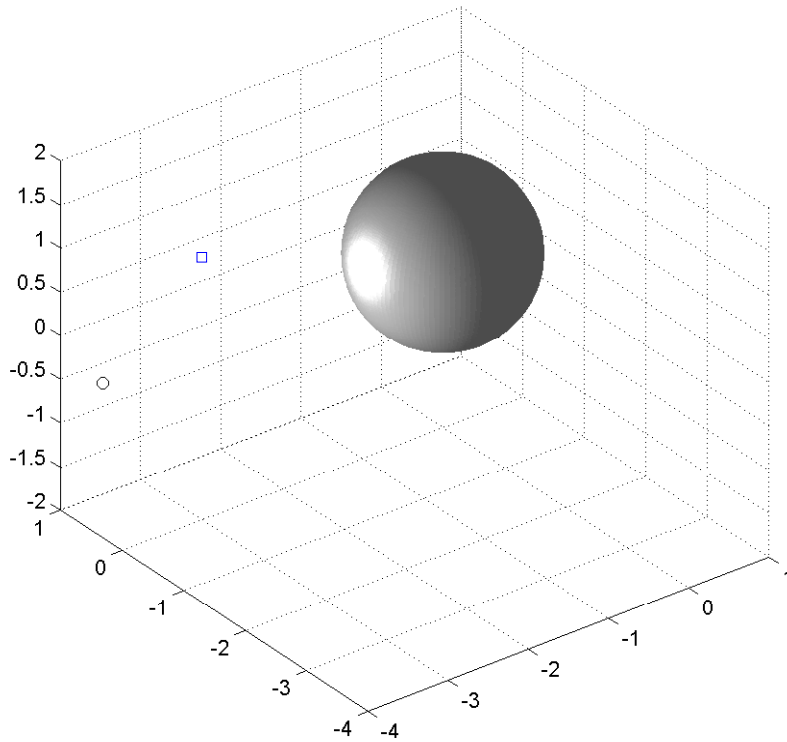
$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{\lambda_1} \\ I_{\lambda_2} \\ \vdots \\ I_{\lambda_\Lambda} \end{bmatrix}, \quad (8.11)$$

όπου  $\Lambda$  το πλήθος των παρόντων φωτεινών συνιστωσών και  $\lambda_l$ ,  $l = 1 \dots \Lambda$  τα αντίστοιχα μήκη κύματος. Πρακτικά, όταν για παράδειγμα χρησιμοποιείται το σύστημα χρωματικών συντεταγμένων  $RGB$  η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\mathbf{I}_{RGB} = \begin{bmatrix} I_R \\ I_G \\ I_B \end{bmatrix}. \quad (8.12)$$

Στα Σχήματα 8.8 και 8.9 παρουσιάζεται το αποτέλεσμα της συνδυασμένης χρήσης των μοντέλων φωτισμού από το περιβάλλον, διάχυτης ανάκλασης και κατοπτρικής ανάκλασης στη σφαιρική επιφάνεια που χρησιμοποιήθηκε και προηγουμένως.

Οι εικόνες 8.8(α-γ) αντιστοιχούν σε τρεις διαφορετικές θέσεις του παρατηρητή ενώ οι παράμετροι της πηγής και της φωτιζόμενης επιφάνειας παραμένουν αμετάβλητες: Ένταση διάχυτης φωτεινής

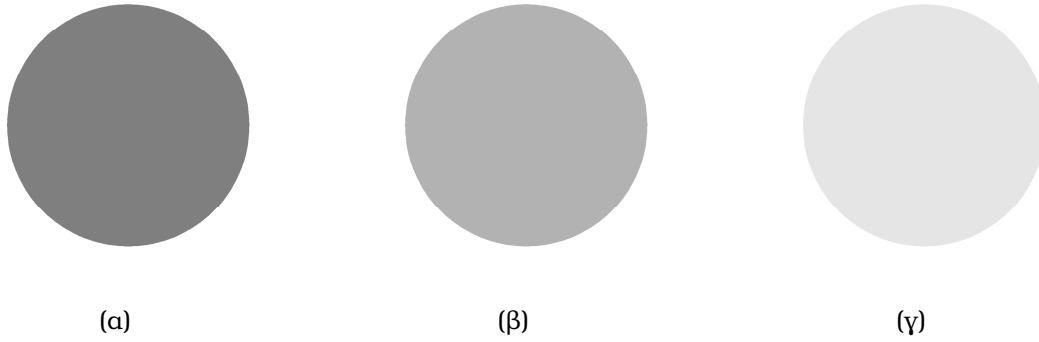


Σχήμα 8.4: Η διάταξη σφαιρικού αντικειμένου ακτίνας  $\rho = 1$ , με κέντρο  $[0, 0, 0]^T$ , πηγής λευκού φωτός (o) στη θέση  $[-4.24, 0, 0]^T$  και παρατηρητή (□) στη θέση  $[-3, -3, 0]^T$  που χρησιμοποιήθηκε στα παραδείγματα.

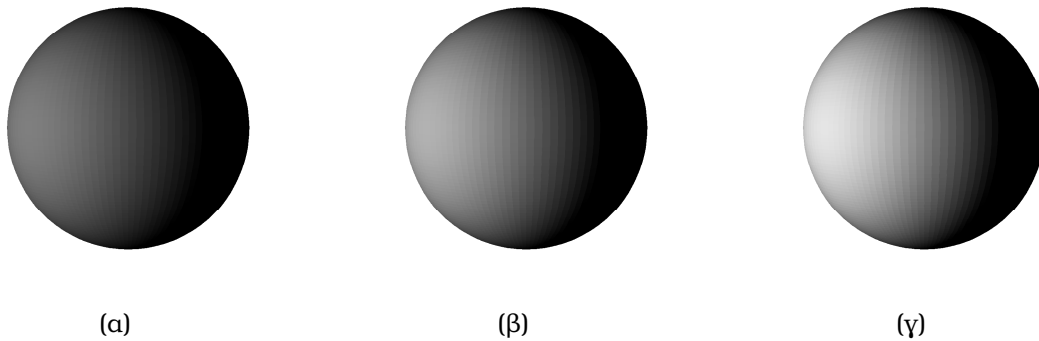
ακτινοβολίας  $I_a = 1$ , ένταση λευκής σημειακής φωτεινής πηγής  $I_{p,0} = 1$  και συντελεστές ανακλαστικότητας της επιφάνειας  $k_a = 0.3$ ,  $k_d = 0.5$ ,  $k_s = 0.7$ . Ο εκθέτης του Phong  $n = 3$ .

Στην εικόνα του Σχήματος 8.9 οι παραπάνω παράμετροι διατηρούνται εκτός του εκθέτη του Phong που γίνεται  $n = 9$ . Η αλλαγή αυτή έχει σαν αποτέλεσμα να συρρικνωθεί η περιοχή που φωτίζεται λόγω ανάκλασης όπως άλλωστε αναμενόταν καθώς όσο μεγαλώνει το  $n$  το μοντέλο του Phong τείνει στο ιδανικό ανακλαστή.

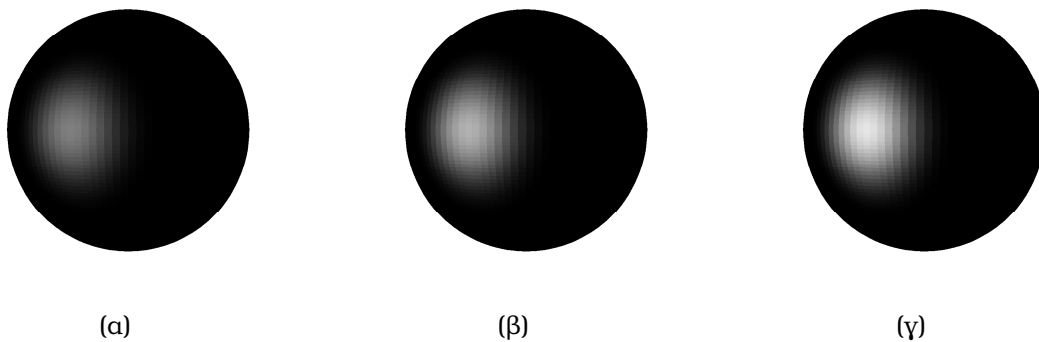
Το επόμενο παράδειγμα επιδεικνύει τη συνύπαρξη πολλαπλών πηγών που εκπέμπουν από διαφορετική θέση και σε διαφορετικό μήκος κύματος (χρώμα). Χρησιμοποιήθηκε η διάταξη του Σχήματος 8.10 με τρεις μονοχρωματικές πηγές διατεταγμένες ως εξής: Η κόκκινη, έντασης  $I_{0,R} = 1$  στη θέση  $[-4.24, 0, 0]^T$ , η πράσινη, έντασης  $I_{0,G} = 1$  στη θέση  $[-3.5, -3.5, 0]^T$  και η μπλέ, έντασης  $I_{0,B} = 1$  στη θέση  $[0, -4.24, 0]^T$ . Επιπλέον ο διάχυτος περιβαλλοντικός φωτισμός ήταν λευκός με ένταση  $I_a = 1$ . Ο θεατής τοποθετήθηκε στη θέση  $[-3, 0, 1]^T$ . Οι συντελεστές ανάκλασης της επιφάνειας ήταν ανεξάρτητες του μήκους κύματος και είχαν τιμές  $k_a = 0.3$ ,  $k_d = 0.5$ ,  $k_s = 0.7$ . Ο εκθέτης του Phong  $n = 9$ .



Σχήμα 8.5: Φωτισμός από διάχυτο φως του περιβάλλοντος έντασης  $I_a = 1.0$ . (α)  $k_a = 0.5$ , (β)  $k_a = 0.7$ , (γ)  $k_a = 0.9$ .

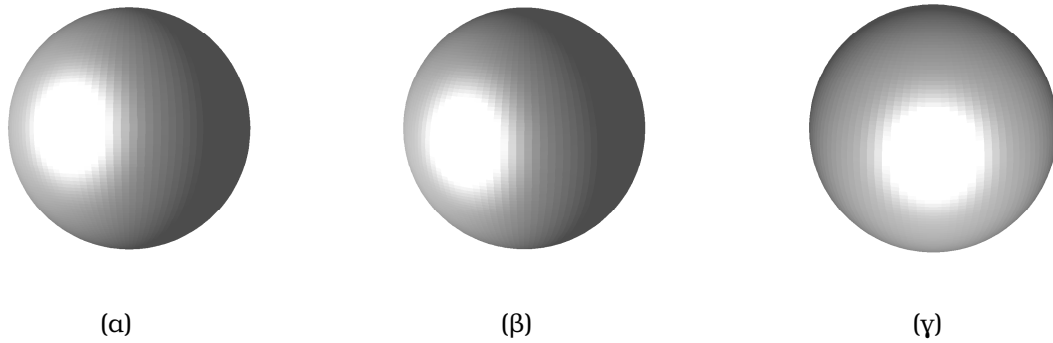


Σχήμα 8.6: Φωτισμός από διάχυτη ανάκλαση. Η ένταση της σημειακής πηγής είναι  $I_{p,0} = 1$ , δεν λαμβάνεται υπόψη η εξασθένιση λόγω απόστασης ( $f_{att} = 1$ ), και οι συντελεστές διάχυτης ανάκλασης είναι κατά περίπτωση (α)  $k_d = 0.5$ , (β)  $k_d = 0.7$ , (γ)  $k_d = 0.9$ .

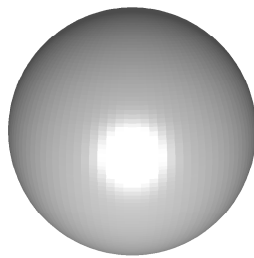


Σχήμα 8.7: Φωτισμός από κατοπτρική ανάκλαση. Η ένταση της σημειακής πηγής είναι  $I_{p,0} = 1$ , δεν λαμβάνεται υπόψη η εξασθένιση λόγω απόστασης ( $f_{att} = 1$ ), ο παρατηρητής βρίσκεται σε όλα τα παραδείγματα στην ίδια θέση με συντεταγμένες  $[-3, -3, 0]^T$ , και οι συντελεστές διάχυτης ανάκλασης είναι κατά περίπτωση (α)  $k_s = 0.5$ , (β)  $k_s = 0.7$ , (γ)  $k_s = 0.9$ .

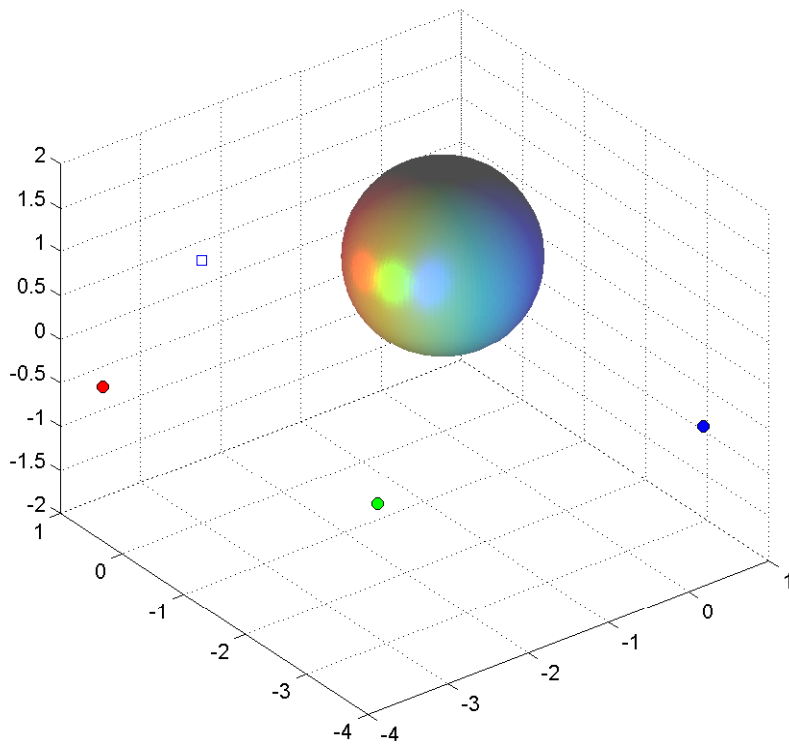




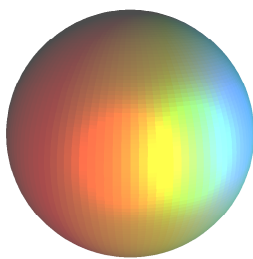
Σχήμα 8.8: Συνδυασμός φωτισμού από το περιβάλλον, διάχυτης και κατοπτρικής ανάκλασης από λευκή σημειακή πηγή. Η ένταση της σημειακής πηγής είναι  $I_{p,0} = 1$ , δεν λαμβάνεται υπόψη η εξασθένιση λόγω απόστασης ( $f_{att} = 1$ ), οι τιμές των παραμέτρων είναι  $k_a = 0.3$ ,  $k_d = 0.5$ ,  $k_s = 0.7$  και  $n = 3$  ενώ ο παρατηρητής βρίσκεται κατά περίπτωση στις θέσεις (α)  $[-3, -3, 0]^T$ , (β)  $[-3, 0, 1]^T$  και (γ)  $[-3, 0, 1]^T$ .



Σχήμα 8.9: Επανάληψη του παραδείγματος του Σχήματος 8.8.γ με  $n = 9$ .



Σχήμα 8.10: Η διάταξη σφαιρικού αντικειμένου, τριών πηγών (R, G, B) (ο) και παρατηρητή (□) που χρησιμοποιήθηκε στο παράδειγμα.



Σχήμα 8.11: Συνδυασμός φωτισμού από το περιβάλλον, διάχυτης και κατοπτρικής ανάκλασης από τρεις μονοχρωματικές πηγές χρώματος κόκκινου, πράσινου, μπλέ έντασης  $I_{p,0} = 1$ . Οι παράμετροι του σύνθετου μοντέλου είναι  $k_a = 0.3$ ,  $k_d = 0.5$ ,  $k_s = 0.7$  και  $n = 3$  και ο παρατηρητής βρίσκεται στη θέση  $[-3, 0, 1]^T$ .

### **8.3 Μοντέλα φωτισμού με βάση τη φυσική οπτική**

(Η ΕΝΟΤΗΤΑ ΑΥΤΗ ΔΕΝ ΘΑ ΠΕΡΙΛΗΦΘΕΙ ΣΤΙΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2003.)