Κεφάλαιο 6

Αποκοπή (clipping)

Στο Κεφάλαιο 5 μελετώντας την προβολή του τρισδιάστατου χώρου στο επίπεδο της κάμερας εξετάστηκε η διαδικασία προβολής μεμονωμένων σημείων και μόνο προς το τέλος του κεφαλαίου (στην Ενότητα 5.3.3) σκιαγραφήθηκε η ανάγκη αποκλεισμού από τη διαδικασία προβολής όσων σημείων δεν ανήκουν στον όγκο θέασης.

Συχνά, ωστόσο, αν και ένα σημείο (ευρισκόμενο εκτός του όγκου θέασης) πρέπει να αποκοπεί, η πληροφορία που αυτό περιέχει είναι απαραίτητη για τον προσδιορισμό της προβολής κάποιων άλλων σημείων που είναι ορατά. Τυπικό παράδειγμα αποτελούν τα σημεία τεθλασμένων γραμμών ή επιφανειών που ορίζονται μέσω των κορυφών τους (βλ. Ενότητα 7.1). Η απλούστερη περίπτωση που εντάσσεται σε αυτή την κατηγορία είναι αυτή ενός ευθύγραμμου τμήματος AB το οποίο στο τρισδιάστατο χώρο προσδιορίζεται μέσω των δύο άκρων του A και B. Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι ένα τέτοιο τμήμα προβάλεται ακριβώς σε εκείνο το ευθύγραμμο τμήμα του επιπέδου προβολής που ορίζεται από τις προβολές των δύο άκρων A' και B' αντίστοιχα. Όμως ακόμη κι αν ένα ή και τα δύο άκρα A και B βρίσκονται εκτός του όγκου θέασης είναι πιθανόν κάποιο εσωτερικό (υπο-)τμήμα του AB να είναι εντός του οπτικού πεδίου της κάμερας και συνεπώς η προβολή του να πρέπει να υπολογιστεί. Ο προβληματισμός αυτός επεκτείνεται ασφαλώς και σε πολύγωνα (στην απλούστερη περίπτωση τρίγωνα) που είναι *μερικώς* ορατά.

Η διαδικασία προσδιορισμού του μέρους οποιουδήποτε αντικειμένου εμπίπτει στο οπτικό πεδίο της κάμερας ονομάζεται *αποκοπή (clipping)*. Πρακτικά, το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι ο προσδιορισμός μίας νέας τεθλασμένης γραμμής ή επιφάνειας (για την ακρίβεια των κορυφών της) που προσδιορίζει το σύνορο του μέρους του αντικειμένου που ανήκει στον όγκο θέασης.

Η διαδικασία αποκοπής μπορεί να υλοποιηθεί, εναλλακτικά, σε δύο διαφορετικές φάσεις του υπολογισμού των προβολών:

1. Πρίν από τους μετασχηματισμούς προβολής: Στην περίπτωση αυτή ελέγχεται εάν οι κορυφές που καθορίζουν τα αντικείνα (συνήθως στοιχειώδη αντικείμενα όπως ευθύγραμμα τμήματα,

τρίγωνα, πολύγωνα) ανήκουν στον τρισδιάστατο όγκο θέασης. Αν διαπιστωθεί ότι ολόκληρο το αντικείμενο είναι εντός του συγκεκριμένου όγκου η διαδικασία της προβολής υλοποιείται όπως περιγράφεται στο Κεφάλαιο 5. Στην αντίθετη περίπτωση υπολογίζονται οι κορυφές της τομής του αρχικού αντικειμένου με τον όγκο θέασης. Πρέπει να σημειωθεί ότι το αντικείμενο « τομή » μπορεί να έχει διαφορετικό αριθμό κορυφών από το αρχικό και επίσης μπορεί να είναι μή-κυρτό ακόμη κι αν το αρχικό είναι κυρτό.

2. Μετά τους μετασχηματισμούς προβολής: Στην περίπτωση αυτή όλα τα σημεία της σκηνής προβάλλονται χωρίς να ελέγχεται αν ανήκουν ή όχι στον όγκο θέασης. Κατόπιν οι διδιάστατες προβολές των αντικειμένων ελέγχονται έναντι του ορθογωνίου παραθύρου με κορυφές *LL*, *LU*, *RU* και *RL*.

Το μειονέκτημα της πρώτης μεθοδολογίας είναι η αυξημένη πολυπλοκότητα υπολογισμών στον τρισδιάστατο χώρο. Μειονεκτήματα της δεύτερης προσέγγισης είναι ότι (α) δεν υλοποιείται η ιδέα της απόρριψης των πολύ μακρινών και των πολύ κοντινών σημείων (βλ. επίπέδα F και N της Ενότητας 5.3.3) και (β) η πολυπλοκότητα αυξάνει λόγω του ανώφελου υπολογισμού των προβολών πλήθους σημείων τα οποία εκ των υστέρων μπορεί να απορριφθούν. Είναι προφανές ότι ένας συνδυασμός των δύο προσεγγίσεων μπορεί να έχει συνολικά καλύτερες επιδόσεις.

Στις δύο ενότητες που ακολουθούν παρουσιάζεται η μεθοδολογία της αποκοπής χωριστά για κάθε μία από τις παραπάνω προσεγγίσεις.

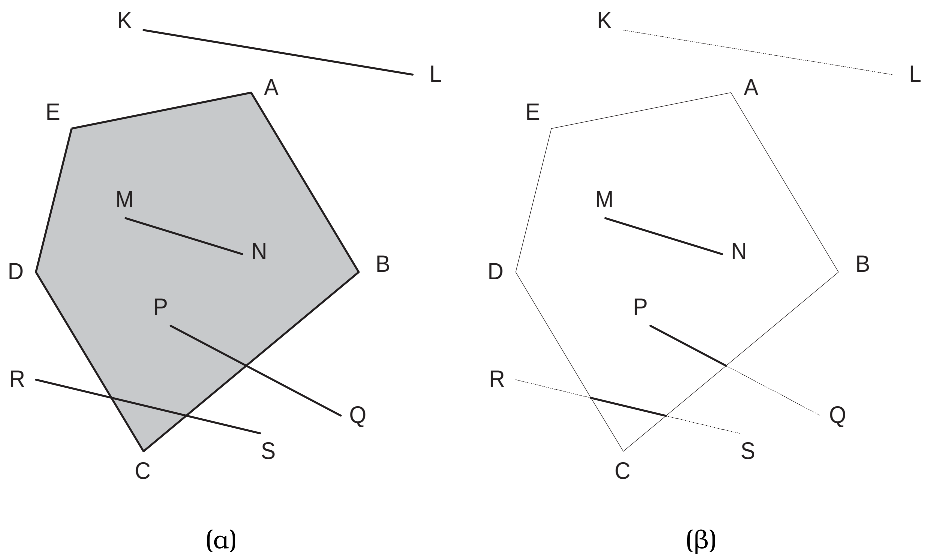
6.1 Αποκοπή από επίπεδα κυρτά πολύγωνα

Οποιαδήποτε τεθλασμένη γραμμή αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα και οποιαδήποτε κλειστή πολυγωνική περιοχή μπορεί να αποικοδομηθεί σε ένα σύνολο τριγωνικών μερών. Συνεπώς η διαδικασία αποκοπής επίπεδων (τεθλασμένων) σχημάτων από επίπεδα κυρτά πολύγωνα εύκολα ανάγεται στο πρόβλημα υπολογισμού της αποκοπής των στοιχειωδών ευθυγράμμων τμημάτων ή τριγώνων.

6.1.1 Αποκοπή ευθυγράμμων τμημάτων

Στο Σχήμα 6.1 παρουσιάζονται οι τέσσερεις περιπτώσεις σεναρίων αποκοπής ευθύγραμμου τμήματος από οποιοδήποτε κυρτό πολύγωνο.

Κάθε μία από τις n ευθείες που ορίζονται από τις πλευρές ενός κυρτού n-γώνου διαιρεί το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα εκ των οποίων το ένα περιέχει ολόκληρο το πολύγωνο. Στο εξής το εν λόγω ημιεπίπεδο θα συμβολίζεται ως ημιεπίπεδο-0 της συγκεκριμένης ευθείας ενώ για το συμπληρωματικό του θα χρησιμοποιείται ο όρος ημιεπίπεδο-1. Κατά σύμβαση το ημιεπίπεδο-0



Σχήμα 6.1: (α) Οι δυνατές περιπτώσεις αποκοπής ευθύγραμμου τμήματος από κυρτό πολύγωνο: πλήρης αποκοπή (KL), πλήρης αποδοχή (MN), μερική αποκοπή του ενός άκρου (PQ) ή και των δύο άκρων (RS). (β) Το αποτέλεσμα της αποκοπής

περιέχει και τα σημεία της ευθείας ενώ το ημιεπίπεδο-1 είναι ανοιχτό. Από κοινού οι n ευθείες διαμερίζουν το επίπεδο σε χωρία (βλ. Σχήμα 6.2) τα οποία μπορεί να ταυτοποιηθούν (να λάβουν κωδικούς) από διαδικές λέξεις της μορφής $w = b_n b_{n-1} \cdots b_1 b_0$ όπου

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{αν το χωρίο βρίσκεται στο ημιεπίπεδο-0 της ευθείας } i \\ 1 & \text{αν το χωρίο βρίσκεται στο ημιεπίπεδο-1 της ευθείας } i \end{cases} \tag{6.1}$$

Με βάση τα παραπάνω, οι n ευθείες διαμερίζουν το επίπεδο *το πολύ* σε 2^n χωρία. Στη συνέχεια, κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχίζεται στον κωδικό του χωρίου που ανήκει. Με αναφορά στα παραπάνω, οι ακόλουθες παρατηρήσεις θα χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή ενός αλγόριθμου αποκοπής:

1. Τα σημεία τύπου $00 \cdots 00$ και μόνον αυτά είναι στο εσωτερικό του κυρτού πολυγώνου.

2. Το i-οστό bit του κώδικα δύο σημείων διαφέρει αν και μόνο άν βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας i.

Κατόπιν των παραπάνω παρατηρήσεων ο αλγόριθμος αποκοπής ενός τυχαίου ευθύγραμμου τμήματος PQ ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1ο:

Υπολογίζονται οι κωδικοί p και q των άκρων του P και Q αντίστοιχα. Ο υπολογισμός απαιτεί τον έλεγχο της θέσης των σημείων ώς προς κάθε μία από τις n ευθείες και χρήση της σχέσης 6.1. Στη γενική περίπτωση τα σημεία της ευθείας i έχουν συντεταγμένες (x, y) που ικανοποιούν τη σχέση

$$a_i x + \beta_i y + 1 = 0, \tag{6.2}$$

όπου οι σταθερές a_i, β_i υπολογίζονται από τις συντεταγμένες των κορυφών του πολυγώνου που ορίζουν τη συγκεκριμένη ευθεία. [1] Τα σημεία των δύο ημιεπιπέδων υπακούν την ανισότητα $a_i x + \beta_i y + 1 \gtrless 0$ με διαφορετική φορά. Η φορά της ανισότητας που αντιστοιχεί στο ημιεπίπεδο-0 είναι κατά περίπτωση αυτή που ικανοποιούν (όλες) οι υπόλοιπες κορυφές του πολυγώνου. Η ισότητα ανατίθεται και αυτή στο ημιεπίπεδο-0.

Βήμα 2ο:

Αν $p = q = 00 \cdots 00$ τότε και τα δύο άκρα βρίσκονται εντός του κυρτού πολυγώνου οπότε δεν χρειάζεται αποκοπή. Σε κάθε άλλη περίπτωση προχωράμε στο 3ο Βήμα.

Βήμα 3ο:

Υπολογίζεται η λογική έκφραση $r = p\ XOR\ q$. Αν το i-οστό bit (r_i) του r είναι 1 τότε το ευθύγραμμο τμήμα PQ τέμνεται από την ευθεία i σε κάποιο σημείο T_i το οποίο μάλιστα είναι διαφορετικό από τα P, Q.

Βήμα 4ο:

Για κάθε μία από τις τέμνουσες ευθείες που προσδιρίστηκαν στο 3ο Βήμα υπολογίζεται το αντίστοιχο σημείο τομής T_i. Τα σημεία του ευθύγραμου τμήματος PQ ανήκουν σε ευθεία με εξίσωση

$$ax + \beta y + 1 = 0, \tag{6.3}$$

όπου οι σταθερές a, β υπολογίζονται από τις συντεταγμένες των άκρων P και Q. Το σύστημα των δύο γραμμικών εξισώσεων 6.2 και 6.3 καθορίζει τις συντεταγμένες του εκάστοτε σημείου τομής T_i.

Βήμα 5ο:

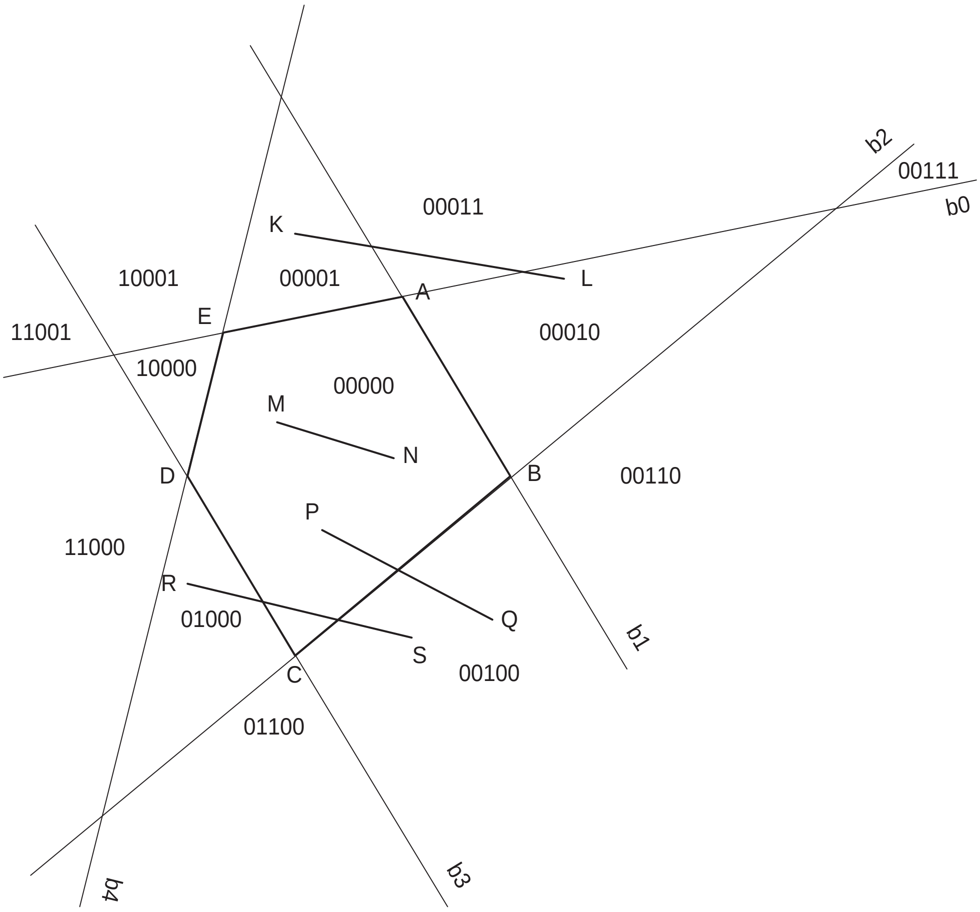
Το σύνολο των σημείων τομής T_i και επιπλέον τα δύο άκρα P και Q διατάσσονται ώς προς τη μία συντεταγμένη τους και στη συνέχεια το αρχικό τμήμα PQ κατακερματίζεται σε επιμέρους τμήματα. Κάθε ένα από τα τμήματα αυτά είτε βρίσκεται ολόκληρο μέσα στο πολύγωνο είτε δεν το τέμνει καθόλου.

Βήμα 6ο:

Για κάθε ένα από τα επιμέρους τμήματα εκτελούνται τα Βήματα 1 και 2 του αλγορίθμου για να αποφασιστεί αν αυτά βρίσκονται (εξολοκλήρου) στο εσωτερικό του πολυγώνου ή όχι. Όσα από τα τμήματα δεν βρίσκονται στο εσωτερικό αποκόπτονται ολοκληρωτικά.

Η πιο χρήσιμη ειδική περίπτωση του παραπάνω αλγορίθμου αφορά την αποκοπή ευθυγράμμων τμημάτων από *ορθογώνια παραλληλόγραμμα* με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες του επιπέδου. Στην περίπτωση αυτή τα Βήματα 1 και 4 του αλγορίθμου απλουστεύονται καθότι

[1] Αν η ευθεία ορίζεται από τις κορυφές $A = (x_A, y_A)$ και $B = (x_B, y_B)$ τότε $\begin{bmatrix} a_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



Σχήμα 6.2: Οι n ευθείες των πλευρών ενός κυρτού n-γώνου διαμερίζουν το επίπεδο σε 2^n (το πολύ) περιοχές.

οι τέσσερεις ευθείες που ορίζονται περιγράφονται (με αναφορά στο Σήμα 6.3) από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
\text{Ευθεία } i = 0: &\quad y = y_{max} = y_{AB} \\
\text{Ευθεία } i = 1: &\quad x = x_{max} = x_{BC} \\
\text{Ευθεία } i = 2: &\quad y = y_{min} = y_{CD} \\
\text{Ευθεία } i = 3: &\quad x = x_{min} = x_{DA}
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Συνεπώς για το τυχαίο σημείο P του επιπέδου, με συντεταγμένες x_p, y_p, τα 4 bits της κωδικής λέξης του υπολογίζονται, στο Βήμα 1, από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
p_0 &= \text{logical}(y_p > y_{max}) \\
p_1 &= \text{logical}(x_p > x_{max}) \\
p_2 &= \text{logical}(y_p < y_{min}) \\
p_3 &= \text{logical}(x_p < x_{min})
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι στην περίπτωση αυτή, ορίζονται μόνο 9 χωρία ($9 < 2^4$) με τους κωδικούς που φαίνονται στο Σχήμα 6.3.

Επιπλέον στο Βήμα 4, εφόσον χρειαστούν, οι πιθανές τομές της ευθείας που περιγράφεται από την 6.3 με τις τέσσερεις παραπάνω ευθείες βρίσκονται με την (κατάλληλη κατά περίπτωση) αντικατάσταση των x, y με τις τιμές y_{max}, x_{max}, y_{min}, x_{min}.

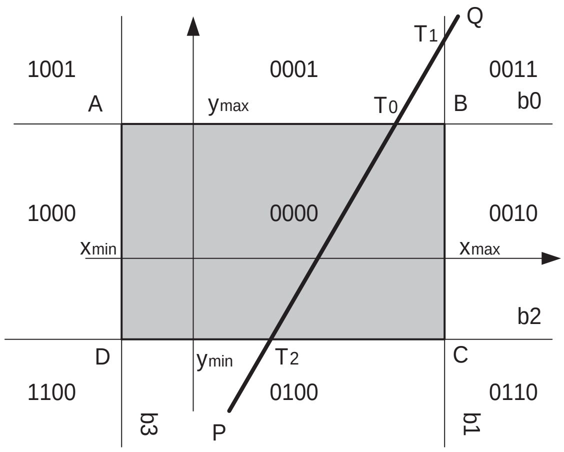
Η αποκοπή ευθυγράμμων τμημάτων από ορθογώνια παραλληλόγραμμα είναι άμεσα εφαρμόσιμη στην πρακτική περίπτωση *αποκοπής μετά τους μετασχηματισμούς προβολής* όπου τα σημεία A, B, C, D αντιστοιχούν κατά σειρά στις κορυφές LU, RU, RL, LL του ορθογώνιου οπτικού πεδίου της κάμερας.

6.1.2 Αποκοπή τριγώνων

(Η Ενοτητα αυτη δεν θα περιληφθει στις σημειωσεις του ακαδημαϊκου ετους 2003.)

6.2 Αποκοπή από τρισδιάστατα κυρτά πολύεδρα

(Η Ενοτητα αυτη δεν θα περιληφθει στις σημειωσεις του ακαδημαϊκου ετους 2003.)



Σχήμα 6.3: Αποκοπή του ευθύγραμμου τμήματος PQ, από το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ABCD$. Η εφραμογή του αλγορίθμου οδηγεί στην κατάτμηση του PQ στα επιμέρους τμήματα PT_2, T_2T_0, T_0T_1 και T_1Q. Από αυτά αποκόπτονται όλα πλην του T_2T_0 που βρίσκεται εξολοκλήρου μέσα στο $ABCD$